УДК 514.763:378.147:004.4’42

РОЗРОБКА ІНТЕРАКТИВНОГО GEOGEBRA-АПЛЕТУ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ КРИВИХ У ПРОСТОРІ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ РЕПЕРА ФРЕНЕ

Яковенко А.С., канд. фіз.-мат. наук,
krylovaas@gmail.com,ORCID:0000-0001-9707-7810
Університет Шеффілда (м. Шеффілд, Великобританія)
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (м. Запоріжжя, Україна)
Василець Є.С.,
iamjalesy@gmail.com
Титаренко Н.Є.,
naevti@gmail.com, ORCID:0000-0002-2272-9586
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (м. Запоріжжя, Україна)

У статті висвітлено розробку інтерактивного GeoGebra-аплету, призначеного для моделювання властивостей просторових кривих, заданих у параметричній формі, з метою дослідження репера Френе та його компонентів в кожній точці кривої. У межах дослідження проведено аналіз актуальних наукових публікацій, що охоплюють проблеми візуалізації складних просторових об'єктів при вивченні геометрії. Обґрунтовано доцільність створення такого цифрового ресурсу в умовах дистанційного та змішаного навчання для підвищення ефективності вивчення диференціальної геометрії студентами математичних і фізико-математичних спеціальностей.

Розроблений аплет дозволяє: будувати просторову криву за параметричними рівняннями та проводити інтерактивне 3D-дослідження отриманої моделі, візуалізувати динамічну зміну дотичного, нормального і бінормального векторів, а також відповідних площин в кожній точці кривої, обраної користувачем за допомогою елементів аплету, автоматично обчислювати кривину та скручування у цій точці.

Описаний алгоритм розробки аплету, що поєднує етапи математичного моделювання, інтеграції обчислювальних інструментів та педагогічної доцільності. Особливу увагу приділено опису конструювання інтерфейсу аплету, де поєднуються 3D полотно з візуалізацією динамічної зміни просторових елементів та 2D панель керування та виводу числових значень. Такий підхід відтворення динамічної зміни репера Френе вздовж траєкторії точки сприяє формуванню глибшого інтуїтивного розуміння складних геометричних понять. Аналіз можливостей аплету свідчить про його ефективність в персоналізації навчання, тобто дозволяє самостійно формулювати *гіпотези та перевіряти їх у процесі зміни параметрів моделі, і, крім того, як засобу візуалізації для розвитку аналітичного та просторового мислення. Наведено приклади міжпредметної інтеграції з механікою, теоретичною фізикою, інформатикою та новітніми дослідженнями. Отримані результати можуть бути використані для модернізації методичного забезпечення навчальних курсів з диференціальної геометрії, математичного моделювання, комп'ютерної графіки та розробки інтерактивних моделей інших просторових об'єктів.*

Ключові слова: GeoGebra, диференціальна геометрія, репер Френе, просторові криві, інтерактивна візуалізація, освітній аплет, динамічна математика, дистанційне навчання

Постановка проблеми. Згідно аналізу інституту освітньої аналітики серед викликів які постали перед освітою в Україні в умовах воєнного стану є брак якісного освітнього електронного контенту, що пов'язано із забезпеченням ефективного онлайн-навчання. Тому одним із завдань цифрової трансформації освіти і науки є створення інтерактивних навчальних матеріалів, що допомагатимуть підвищувати й балансувати якість освіти [1]. В цій роботі буде обговорено важливість інтерактивної візуалізації об'єктів диференціальної геометрії, особливо в умовах дистанційного навчання. Також розглянемо використання пакету динамічної геометрії GeoGebra для реалізації інтерактивного простору для експерементуванням із репером Френе та його складовими, що допомагає реалізувати емпіричне дослідження цього поняття при вивченні диференціальної геометрії.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Ідея покращення візуалізації складних понять диференціальної геометрії, таких як кривина, Репер Френе у навчальному процесі була описана в статті H. Kaufmann [2], де презентується додаток в доповненій реальності (AR), що інтегрує об'єкти диференціальної геометрії в освітнє програмне забезпечення динамічної геометрії Construct3D. Проте для роботи цієї системи необхідна спеціальна лабораторія доданої реальності із засобами, такими як наголовний дисплей та бездротова ручка з оптичним відстеженням, що потребує додаткового фінансування та унеможливлює роботу дистанційно.

Проблемою створення платформи для моделювання, перевірки гіпотез, експериментів із математичними об'єктами займався M. Hohenwarter, який є розробником динамічного математичного програмного забезпечення з відкритим кодом GeoGebra [3], що набуло широкого поширення в освітній, інженерній та науково-дослідницькій діяльності. Разом із R Weinhandl вони дослідили поєднання методики перевернутого навчання з використанням GeoGebra для створення ефективного середовища вивчення математики в старшій школі [4]. Їх дослідження акцентується увага на зміцненні зв'язку між теорією та практикою, на підвищенні інтересу до експериментального дослідження поведінки математичних моделей, хоча це потребує додаткових зусиль та чітких інструкцій. В умовах дистанційної освіти, що іноді має бути реалізована в асинхронному форматі, важливу роль має можливість використання власних гаджетів для реалізації аналітичного та емпіричного пошуку розв'язків. В роботі О. Семеніхіної [5] обгрунтовано використання хмарно сервісу GeoGebra для викладання дисциплін математичного циклу та проведення комп'ютерного експерименту в рамках шкільного курсу математики. Позитивний вплив імплементації GeoGebra на результати вивчення здобувачами вищої освіти теми полярної системи координат відзначив R. Owusu [6], який проявляється зростанням інтересу та впевненості студентів, формуванням позитивної мотивації до вивчення геометрії.

Незважаючи на об'ємні дослідження в кластері шкільної освіти, створення GeoGebra аплетів (англ. applet - динамічний програмний засіб, інтерактивна модель, яку можна вбудувати у веб-сторінку) є корисними для розвитку просторового мислення та підвищення пізнавальної діяльності здобувачів вищої освіти для освоєння більш складних математичних понять. Так в роботі А. Яковенко [7] описані алгоритми побудов динамічних моделей та експериментальних платформ у вигляді GeoGebra-аплету для моделювання властивостей поверхонь другого порядку, де були поєднані 2D та 3D полотна.

Однією з найбільших дидактичних проблем при вивченні диференціальної геометрії є абстрактність понять і складність їх просторового уявлення. Такі поняття, як кривина, бінормаль, головне нормальне прискорення тощо, часто залишаються формальними для студентів без належної наочної підтримки. K.-S. Choi в своїй статті [8] запропонував методику використання GeoGebra для побудови тривимірного середовища на основі 2D полотна для дослідження кривих у просторі та поверхонь. Були побудовані класичні об'єкти диференціальної геометрії, що дозволило студентам спостерігати поведінку кривої в просторі і краще розуміти поняття пов'язані із кривиною. Проте така розробка не використовує всіх можливостей оновленого середовища GeoGebra що має можливості проєктувати на 3D полотні. Аналіз вже створених ресурсів хмарного сховища платформи GeoGebra виявив аплети які реалізують моделювання динамічної зміни виду репера Френе залежно від виду кривої та положення точки на ній, як, наприклад аплет автора J. C. P. Campuzano [9], що буде слугувати моделлю-аналогом, проте ці динамічні моделі є іншомовними та не відображають повної інформації для дослідження поведінки репера Френе.

Формулювання цілей статті. Мета статті – описати можливості GeoGebra-аплету, етапи та алгоритм його проєктування для моделювання кривої у просторі, заданої параметрично, для дослідження репера Френе та його складових на цій кривій.

Основна частина. Нами був розроблений GeoGebra-аплет «Крива у просторі та репер/тригранник Френе» [10], який дозволяє студентам побачити динамічну зміну рухомого ортонормованого базису (репера Френе) вздовж просторової кривої (рис 1). Цей репер складається з трьох взаємно ортогональних векторів: дотичного, нормального та бінормального. Саме вони забезпечують повне геометричне розуміння локальної поведінки кривої в просторі. Аплет розташований на робочому аркуші (worksheet), де також відображений автор, назва та опис можливих експериментів у цьому динамічному середовищі. Безпосередньо аплет складається з двох частин: на правому 3D полотні відображена динамічну візуалізацію кривої у просторі та відповідну зміну репера Френе та взаємопов'язаних із ним об'єктів (прямих, площин), в залежності від положення точки t_0; на лівому 2D полотні розміщено елементи керування (поля введення, повзунки, кнопки прапорці та формули).

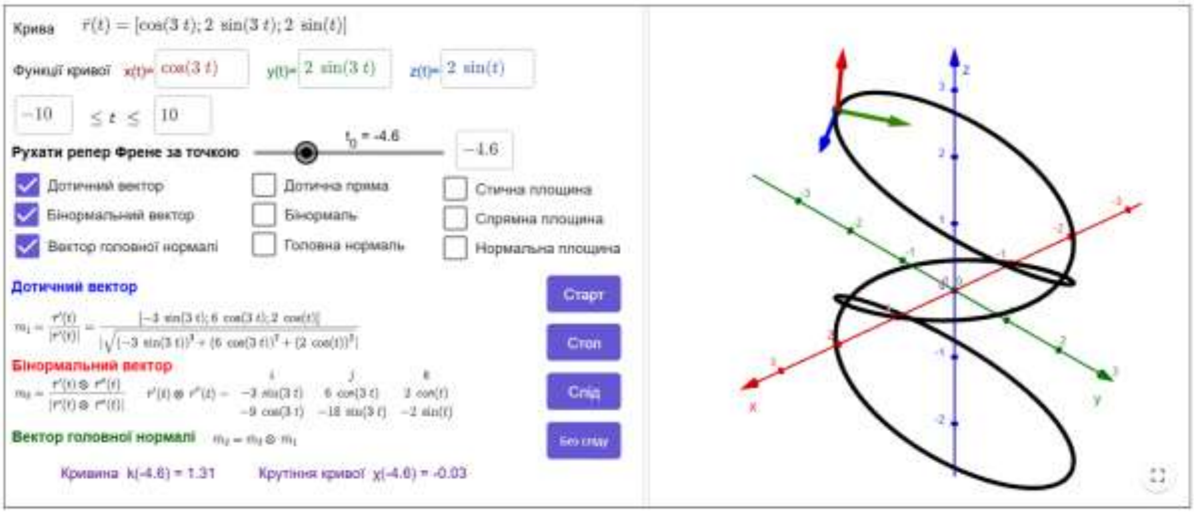

Рис. 1. GeoGebra-аплет «Крива у просторі та репер/тригранник Френе»

Розглянемо функціонал цього аплету. З допомогою віконець вводу можна вести параметричне рівняння кривої та межі задання параметра *t*, що дозволяє будувати власні приклади кривих у параметричній формі. Відповідно до заданої параметричної вектор-функції будуються дотичний вектор, біноміальний вектор та вектор головної нормалі, що обчислюються автоматично за формулами наведеними в розділі виведення інформації (розташована зліва знизу на 2D полотні).

Використовуючи повзунок, користувач може змінювати положення точки на кривій в залежності від значення параметра t_0 або ввести конкретне значення цього параметра у віконці поряд. Відповідно до значення t_0 обраховуються значення кривини та крутіння в цій точці, що відображається в області виведення інформації. Це дозволяє досліджувати поведінку кривини та скручування на різних ділянках, бачити зміну репера Френе в русі, що підсилює інтуїтивне розуміння просторової геометрії.

Активуючи прапорці або роблячи їх не активними можна додати або сховати відповідні елементи як на правій панелі 3D моделювання кривої так і в області виведення інформації. Натиснувши кнопку «Старт» користувач побачить анімацію зміни параметра t_0 і відповідно і всіх елементів, які із ними пов'язані. Кнопка «Стоп» зупиняє анімацію. Кнопки «Слід» або «Без сліду» призначені для відображення повного руху репера та вимкнення цієї функції відповідно. Щоб очистити динамічну модель від залишених слідів достатньо змінити масштаб 3D полотна. Такий дизайн дає можливість зробити аплет максимально інформативним але й тим часом уникнути нагромадження, і зосередити на одній сторінці майже всі елементи що розглядаються при вивченні кривої у просторі в курсі «Диференціальна геометрія». Цей підхід дає можливість здобувачу вищої освіти формулювати та перевіряти власні гіпотези, наприклад про зв'язок між рівняннями кривих та властивостями руху.

Для розробки аплету, який буде обчислювати та відображати у 3D просторі вектори базису Френе, а також елементи тригранника Френе (дотичну пряму, головну нормаль та бінормаль, а також нормальну, спрямну та стичну площини) використаємо застосунок Classic 5 for Advanced Features, заздалегідь завантажений на комп'ютер за посиланням (https://www.geogebra.org/download). Алгоритм побудови кривої у просторі був опублікований нами раніше [11], і він є актуальним і в цьому випадку за виключенням методу вводу.

У панелі «View» (Вид) обираємо полотна, які нам потрібні для побудови: «Algebra» (Алгебра), «Graphics2» (2D Полотно) та «3D Graphics» (3D Полотно). Полотно «Алгебра» необхідне для задання функцій, використання інструментів, тощо (у кінцевому варіанті це полотно є прихованим), для розміщення Input Box (Строки вводу), слайдери та тексту необхідне 2D полотн», а 3D полотно для візуалізації кривої та її рухомого репера.

Почнемо із елементів вводу та керування динамічної моделі кривої у просторі. Для створення полей вводу функції (Input Box) попередньо оголосимо самі функції: $f(t)=cos(t)$, $g(t)=sin(t)$, $h(t)=2t$ (після створення строки вводу матимемо змогу змінити функції). Розмістимо на 2D полотні три елементи «Поле введення», та в діалоговому вікні оберемо у випадаючому спису розділу «Пов'язані об'єкти» (Linked element) функції $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ відповідно. Також означимо границі параметра t, оголосивши константи t_{max} та t_{min}. Для них також зробимо можливість бути зміненими користувачем за допомогою двох елеменетів «Поле введення». Аналогічно пов'яжемо константи із відповідними полями вводу. Слід зазначити що можна використати властивості елементу «Поле введення», додавши напис типу «$f(t)=$» в діалоговому вікні для введення функцій, або прибрати будь які написи під час введені границь параметра t, знявши прапорець із пункту «Показати позначення». Такі маніпуляції зменшують кількість елементів на полонті.

Криву $\bar{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ задаємо за допомогою функції Curve

(Крива) поля «Алгебра», що має наступний синтаксис:

Curve(<Expression>, <Expression>, <Expression>, <Parameter Variable>, <Start Value>, <End Value>)

У рядку введення визначаємо криву *a*, де замість перших трьох виразів записуємо вже готові наші функції *f(t)*, *g(t)* та *h(t)* відповідно, замість «Parameter Variable» (Параметрична змінна) записуємо літеру t, яка фігурує в наших функціях. За початкове (Start Value) та кінцеве значення (End Value) кривої вводимо t_{max} та t_{min} відповідно. Як варіант іншого способу вводу граничних значень, можна створити слайдери (Slider) із назвами t_{max} та t_{min}, задати їх значення, наприклад t_{min} може варіюватися від -10 до 0, а t_{max} від 0 до 10. Проте це обмежує варіативність цих значень при різному масштабуванні кривої. Слід зауважити, що інтерфейс застосунку GeoGebra дозволяє змінювати параметри кривої будь-коли.

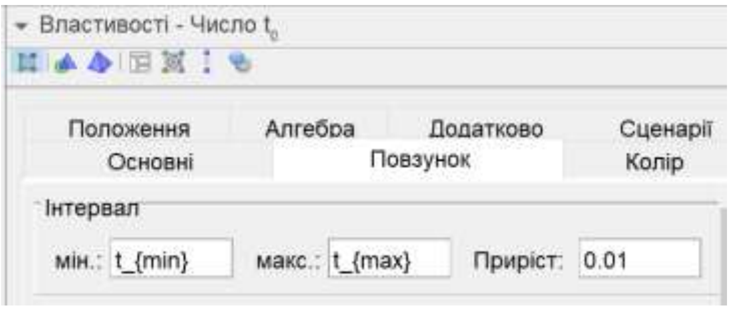

Рис. 2. Фрагмент вікна властивостей повзунка t_0

Створімо слайдер t_0, для цього просто у головну строку введення напишемо t_0 та натиснемо «enter», а в налаштуваннях змінимо інтервали від t_{min} до t_{max} (рис. 2), що дозволить контролювати розбіг значень цього параметру у відповідності із користувацьким обмеженням самого параметру *t*. Одразу за цим вводимо наступну комбінацію в полі «Алгебра»:

A=a(t_0),

де *a* - назва кривої, точка А - точка, яка рухається відповідно до значення t_0 по кривій. Додамо елементи «Текст» для оформлення інтерфейсу, щоб підписати призначення елементів.

Закріпляємо кожен елемент відносно екрану у меню властивості, активізувавши пункт «Закріпити». Шрифт кожного тексту можна змінювати відповідно до вподобань та вимог. При оформленні формул та виразів за допомогою інструменту «Текст» у GeoGebra ми користуємось мовою розмітки «LaTeX», яку зручно застосувати за допомогою вбудованого редактору. Для нашого аплету необхідно робити вирази також і «динамічними», тобто при зміні функцій текст змінювався автоматично, що реалізується за допомогою спадного списку «Об’єкти» діалогового вікна вводу тексту.

Побудуємо вектори базису Френе. Координати дотичного вектора шукаємо за допомогою формули

$$\bar{m}_1 = \frac{\bar{r}'(t)}{|\bar{r}'(t)|}$$

яку вводимо у поле «Алгебра» у вигляді виразу *a’(t_0)/|a’(t_0)|*. Тут маємо першу похідну вектор-функції у точці t_0, поділену на її абсолютне значення. В результаті маємо точку B із відповідними координатами. Це є координати дотичного вектору відносно початку координат $O(0,0,0)$. Приховаємо точку B і побудуємо дотичний вектор з точки A за допомогою команди «Vector», де у дужках вказуємо через кому точку, з якої починатиметься вектор, тобто динамічна точку A, і кінцеве значення точки у вигляді суми $A+B$. Маємо перший вектор, колір якого змінюємо до загального дизайну аплету на синій, як і напис в області виводу інформації. Використаємо інструмент текст та додамо формулу розрахунку із динамічними виразами для похідних. Для цього тексту використаємо можливість вставити елементи оформлення формул з редактора LaTeX та об'єкти цього аплету, такі як значення похідних f'(t), g'(t), h'(t), що попередньо були знайдені у розділі «Алгебра» за допомогою функції Derivative() (рис. 3).

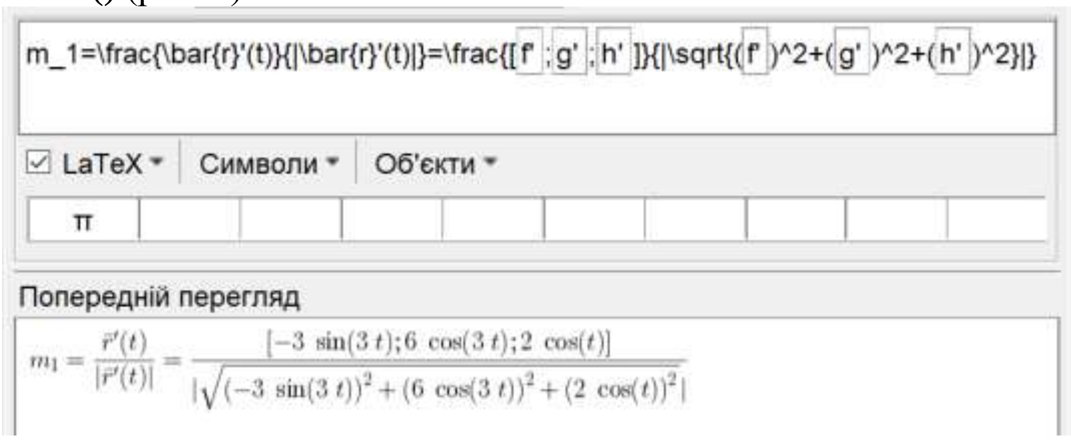

Рис. 3. Елемент діалогового вікна вводу тексту для дотичного вектору

Аналогічно будуємо біноміальний вектор m_3, значення якого в точці t_0 знаходимо за формулою

$$\bar{m}_3 = \frac{\bar{r}'(t)\ \otimes\ \bar{r}''(t)}{|\bar{r}'(t)\ \otimes\ \bar{r}''(t)|}.$$

Для знаходження другої похідної використаємо функцію Derivative(a') як похідну від першої похідної. Визначимо точку C=a''(t_0), за допомогою команди «Vector» проводимо два вектори за точками B та C, маємо вектори v та w відповідно. Тепер побудуємо вектор бінормалі, ввівши строку вводу наступний вираз: Vector(A, A + (v ⊗ w) / abs(v ⊗ w)) (в GeoGebra оголошений спеціальний символ для дії векторного добутку), тобто ми провели з точки A вектор, який дорівнюватиме векторному добутку першої та другої похідної поділене на абсолютне значення (модуль) цього векторного добутку. Інші елементи ховаємо, натиснувши на об'єкти у вкладці алгебри правою кнопкою миші та вимкнувши властивість «Show Object». За тою самою схемою як і для дотичного вектора додаємо підпис та формулу знаходження із інтерактивними елементами.

Останній вектор, головна нормаль, є векторним добутком бінормалі та дотичного вектора (векторний добуток не є комутативною операцією, тому порядок важливий). Для його побудови достатньо просто задати вектор: Vector(A, A + b ⊗ u), де b - бінормаль, u - дотична. Розфарбовуємо елемент, додаємо відповідний текст, та закріплюємо всі елементі відносно екрану.

Введемо також три прямі, що проходять через точку A, напрямними векторами яких слугуватимуть вектори репера Френе. Завдяки інструменту PerpendicularPlane введемо площини. Залишається створити для кожного елемента свій CheckBox (прапорці), а також для груп елементів. Створюємо по прапорцю для кожного з трьох векторів, для трьох прямих та площин.

Додаємо формули обрахунку кривини та крутіння в точці t_0, вивівши на екран тільки їх значення, адже для їх обрахунку використовуються ті ж самі вирази похідних, що і для векторів ортонормованого базису, де значення t_0, k, τ є об'єктами GeoGeobra та динамічно змінюються під час експерименту (рис. 4).

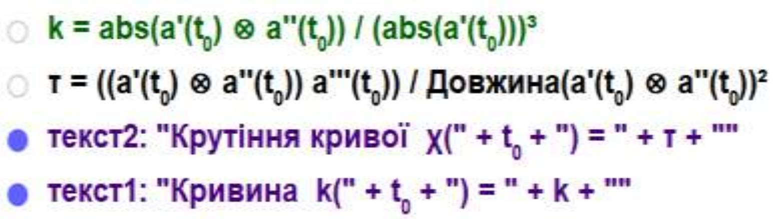

Рис. 4. Елемент розділу «Алгебра» із формулами для знаходження кривини та крутіння та введенням тексту

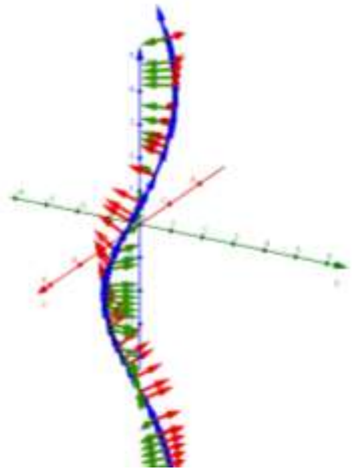

Рис. 5. Результат відображення сліду репера Френе при рівномірній зміні t_0

Для слайдеру t_0 можна також додати строку вводу, вказавши його як споріднений елемент для того, аби мати змогу вписати значення, які не можуть бути позначені на слайдері, такі як числа π, e, та інші ірраціональні числа.

За допомогою інструменту «Show Trace» (залишати слід) можна побачити повний рух репера (рис. 5). Розмістимо кнопки як на (рис. 1) за допомогою інструменту «Button», використавши наступні команди:

- StartAnimation(t_0, true) – починає рух репера;
- StartAnimation(t_0, false) - припиняє рух репера;
- SetTrace(u ,true), SetTrace(b ,true), SetTrace(c ,true) – ініціація сліду для трьох весторів репера Френе;

– SetTrace(u ,false), SetTrace(b ,false), SetTrace(c ,false) - припиняє режим "Залишати слід".

Отже, аплет має заплановану функціональність і ми маємо ще звернути увагу на деякі особливості належного відображення побудованого ресурсу. По-перше, необхідно прибирати всі зайві побудови і можливість користувачу бачити розділ «Алгебра», щоб сконцентрувати увагу саме на двох сконструйованих полотнах для проведення експеременту із складовими репера Френе. Подруге, додаток GeoGebra Classic зберігає пропорції екрану аплету після його збереження. Підібреремо розмір та розташування полотен, пропорції екрану згідно запланованого дизайну та збережемо аплет як GeoGebra файл із розширенням *.ggb.

Наступним етапом є вивантаження отриманого аплету на хмарну платформу GeoGebra, що дозволяє користувачам з усього світу мати доступ до нашого аплету в незалежності від виду мобільного або комп'ютерного пристрою, адже він вбудовується в веб-сторінку WorkSheet. Для цього авторизуємось і додамо ресурс на своїй сторінці ресурсів: Create – Activity. На сторінку додаємо необхідні елементи: заголовок, сконструйований аплет (Upload Applet) та текст.

Тригранник Френе дає локальну систему координат, пов'язану з рухом по кривій: дотичний вектор вказує напрямок руху вздовж кривої, нормаль – напрямок найближчого центру викривлення, а бінормаль – перпендикуляр до площини кривизни, показуючи "нормаль до траєкторії" у просторі.

В механіці та кінематиці рух тіла по довільній траєкторії можна описати через тригранник Френе. Дотичний вектор направлений вздовж швидкості руху, головна нормаль вказує напрямок доцентрового прискорення (до центра кривини траєкторії), а бінормаль – напрямок «вистрілювання» траєкторії з площини кривизни. Це важливо при аналізі, скажімо, польоту літака або руху автомобіля по вигнутій дорозі. Зокрема, в автомобільних системах автопілоту широко використовують координати Френе: шлях (дорога) задається як референтна крива, і рух автомобіля планують у системі координат, прив'язаній до цієї кривої. Іншими словами, тригранник Френе дає природну систему координат для траєкторії, що спрощує задачі планування шляху. Як зазначають дослідники: «В автономному водінні репер Френе, який створює систему координат вздовж еталонної траєкторії, широко використовується для планування траєкторії на криволінійних дорогах» [12].

В фізиці тригранник Френе використовується для аналізу прецесій та обертання систем, що рухаються по криволінійних траєкторіях. Наприклад, при русі гіроскопа по складній траєкторії його власна вісь буде прецесувати; для опису цього ефекту (прецесія Томаса в спеціальній теорії відносності) зручно застосувати базис Френе–Серре вздовж траєкторії руху гіроскопа. Інший приклад – траєкторія зарядженої частинки в магнітному полі: кривина траєкторії пов'язана з дією сили Лоренца, а скрут – з можливим градієнтом поля, і тригранник допомагає сформулювати рівняння руху.

В комп'ютерній графіці та 3D-моделюванні: при побудові згладжених кривих у просторі (сплайнів, Bezier-кривих) для анімації або моделювання, тригранник Френе застосовують, щоб орієнтувати об'єкти уздовж кривої. Наприклад, якщо камера рухається по траєкторії, то напрямок її "погляду" можна задати відносно дотичної і нормалі кривої у кожній точці.

Попри значний прогрес у методиці викладання математики та наукові обґрунтування доцільності запровадження систем динамічної математики, наприклад GeoGebra, Desmos, Maple, існує ряд відкритих проблем. Однією з таких ми вбачаємо завантаженість викладача та недостатню базу, адаптованих під українські реалії, якісних ресурсів. Аби подолати брак україномовних ресурсів, але й при цьому залишити можливість користування ресурсом для користувачів по всьому світу були створені аналоги цього аплету із підписами англійською та німецькою мовами.

Висновки. Розроблений аплет дозволяє користувачам глибше осмислити: як кривина відповідає за "вигин" траєкторії; як скручування відображає "обертання" кривої в просторі; як бінормаль визначає площину викривлення. Таке середовище для експерименту підвищує ефективність викладання диференціальної геометрії, підсилює наочність, забезпечує глибше розуміння математичних структур та сприяє якісній підготовці здобувачів вищої освіти до професійної діяльності. А візуалізація рухомої системи координат допомагає студентам не просто запам'ятати формули, а глибоко зрозуміти фізичний зміст математичних об'єктів.

Таким чином, використання репера Френе у GeoGebra дозволяє не лише глибше вивчити диференціальну геометрію, а й створює міцний міст до таких дисциплін, як фізика, механіка та інформатика. Це значно підвищує міжпредметну інтеграцію знань, розвиток аналітичного мислення й готовність студентів до реального викладання.

Література

1. Освіта в умовах воєнного стану: виклики, розвиток, повоєнні перспективи. [інформаційно-аналітичний збірник] / Київ: Інститут освітньої аналітики, 2023. Режим доступу: https://iea.gov.ua/wp-content/uploads/2023/08/serp_konf_2023.pdf (дата звернення: черв. 2025).
2. Kaufmann, H. (2009). Dynamic Differential Geometry in Education. *Journal for Geometry and Graphics, 13*(2).
3. GeoGebra. [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://www.geogebra.org (дата звернення: черв., 2025).
4. Weinhandl, R., Lavicza, Z., Hohenwarter, M. & Schallert, S. Enhancing flipped mathematics education by utilising GeoGebra. *International Journal*

of Education in Mathematics, Science and Technology (IJEMST), 2020. *8(1),* 1-15. DOI: 10.46328/ijemst.v8i1.832
5. Семеніхіна, О. В., Друшляк, М. Г., & Хворостіна, Ю. В. (2019). Використання хмарного сервісу GeoGebra у навчанні майбутніх учителів природничо-математичних дисциплін. *Information Technologies and Learning Tools*, *73*(5), 48-66. DOI: https://doi.org/10.33407/itlt.v73i5.2500
6. Owusu, R., Bonyah, E., & Arthur, Y. D. The effect of GeoGebra on university students' understanding of polar coordinates. *Cogent Education*, 2023. 10(1) DOI: https://doi.org/10.1080/2331186X.2023.2177050
7. Яковенко, А. (2023). Моделювання властивостей поверхонь другого порядку засобами Geogebra. *Сучасні проблеми моделювання,* Вип. 24, 190-197. DOI: https://doi.org/10.33842/2313-125X-2022-24-190-197
8. Choi, K.-S. (2010). Exploring differential geometric space using GeoGebra. *GeoGebra International Journal of Romania, 1(1)* [Електронний ресурс]. URL: https://ggijro.wordpress.com/wp-content/uploads/2011/07/article-31.pdf
9. Campuzano, J C. P., Dynamic Frenet-Serret frame. [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://www.geogebra.org/m/anbmDpHv (дата звернення: черв., 2025).
10. Василеці, Є, GeoGebra-аплет «Крива у просторі та репер/тригранник Френе» [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://www.geogebra.org/m/zrahr3a5 (дата звернення: черв., 2025).
11. Василець, Є.С., Яковенко, А.С. Використання застосунку Geogebra для опису кривих та знаходження Репера Френе. *XVI Всеукраїнська студентська наукова конференція «Перспективи розвитку точних наук, економіки та методики їх викладання»*, (2024). С. 65-68.
12. Yoon, S., Kwon, Y., Ryu, J., Kim, S., Choi, S., & Lee, K. Reinforcement-Learning-Based Trajectory Learning in Frenet Frame for Autonomous Driving. *Applied Sciences*, 2024. 14(16), 69-77. DOI: https://doi.org/10.3390/app14166977

DEVELOPMENT OF AN INTERACTIVE GEOGEBRA APPLET FOR MODELING THE PROPERTIES OF SPACE CURVES AND EXPLORING THE FRENET FRAME

Anastasiia Yakovenko, Yehor Vasylets, Nataliia Tytarenko

The development of an interactive GeoGebra applet designed for modelling the properties of spatial curves defined parametrically, with the aim of exploring the Frenet frame and its components at each point of the curve, is presented. Within the framework of the study, a review of relevant scientific publications was carried out, focusing on the challenges of visualisation of *complex spatial objects in the context of geometry education. The rationale for creating such a digital resource under conditions of distance and blended learning to enhance the effectiveness of teaching differential geometry to students of mathematics and physics-mathematics programmes was substantiated.*

The developed applet enables the construction of a spatial curve based on parametric equations and facilitates interactive 3D exploration of the resulting model. The dynamic behaviour of the tangent, normal, and binormal vectors—as well as the corresponding planes—can be visualised at any point selected by the user through the applet's interface. Curvature and torsion at the selected point are computed automatically.

The algorithm for applet development is described. It combines stages of mathematical modelling, integration of computational tools and pedagogical relevance. Special attention is given to the design of the applet interface, which integrates a 3D graphics for the dynamic visualisation of spatial elements with a 2D control panel and an output field for data. This approach to representing the dynamic motion of the Frenet frame along the trajectory supports deeper intuitive understanding of complex geometric concepts. The analysis of the applet's functionality indicates its potential for supporting personalised learning by enabling students to formulate and test hypotheses through the manipulation of model parameters. Additionally, the applet serves as an effective visualisation tool that supports the development of analytical and spatial thinking.

Examples of interdisciplinary integration with mechanics, theoretical physics, computer science, and current research directions are provided. The results obtained may be applied to the modernisation of instructional resources in courses on differential geometry, mathematical modelling, computer graphics, and the development of interactive models for other spatial objects.

Key words: GeoGebra, differential geometry, Frenet frame, space curves, interactive visualization, educational applet, dynamic mathematics, distance learning.

References

1. Education under Martial Law: Challenges, Development, and Post-War Prospects. (2023) [informatsiino-analitychnyi zbirnyk] / Kyiv: Instytut osvitnoi analityky URL: https://iea.gov.ua/wp-content/uploads/2023/08/serp_konf_2023.pdf [in Ukrainian].
2. Kaufmann, H. (2009). Dynamic Differential Geometry in Education. *Journal for Geometry and Graphics*, 13(2). [In English].
3. GeoGebra. [Online resource]. URL: https://www.geogebra.org .
4. Weinhandl, R., Lavicza, Z., Hohenwarter, M., & Schallert, S. (2020). Enhancing flipped mathematics education by utilising GeoGebra. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*

(IJEMST), 8(1), 1–15. DOI: 10.46328/ijemst.v8i1.832 [In English]

5. Semenyukhina, O. V., Drushlyak, M. H., & Khvorostina, Y. V. (2019). Using the GeoGebra Cloud Service in Training Future Teachers of Natural and Mathematical Disciplines. *Information Technologies and Learning Tools*, 73(5), 48–66. DOI: 10.33407/itlt.v73i5.2500 [in Ukrainian].
6. Owusu, R., Bonyah, E., & Arthur, Y. D. (2023). The Effect of GeoGebra on University Students' Understanding of Polar Coordinates. Cogent Education, 10(1). DOI: 10.1080/2331186X.2023.2177050 [In English].
7. Yakovenko, A. (2023). Modeling Properties of Quadric Surfaces Using GeoGebra. *Modern Problems of Modeling*, (24), 190–197. DOI: 10.33842/2313-125X-2022-24-190-197 [in Ukrainian].
8. Choi, K.-S. (2010). Exploring Differential Geometric Space Using GeoGebra. GeoGebra International Journal of Romania, 1(1). [Online resource]. URL: https://ggijro.wordpress.com/wp-content/uploads/2011/07/article-31.pdf [In English].
9. Campuzano, J. C. P. Dynamic Frenet-Serret Frame. [Online resource]. URL: https://www.geogebra.org/m/anbmDpHv
10. Vasylets, Y. GeoGebra Applet "Space Curve and Frenet Frame." [Online resource]. URL: https://www.geogebra.org/m/zrahr3a5 [in Ukrainian].
11. Vasylets, Y. S., Yakovenko, A. S. (2024). Using the GeoGebra Application to Describe Curves and Determine the Frenet Frame. XVI All-Ukrainian Student Scientific Conference "Prospects for the Development of Exact Sciences, Economics, and Methods of Their Teaching", 65–68. [in Ukrainian].
12. Yoon, S., Kwon, Y., Ryu, J., Kim, S., Choi, S., & Lee, K. (2024). Reinforcement-Learning-Based Trajectory Learning in the Frenet Frame for Autonomous Driving. Applied Sciences, 14(16), 69–77. DOI: 10.3390/app14166977 [In English].