

УДК 515.2:519.6

ГЕОМЕТРИЧНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ БАЗИСУ ДИСКРЕТНОГО ЕЛЕМЕНТА H^2

Астіоненко І.О., канд. фіз.-мат. наук,
astia@ukr.net, ORCID: 0000-0002-5831-6353

Херсонський національний технічний університет (м. Херсон, Україна)

Гучек П.Й., д-р. техн. наук,
phuchek@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6110-6816

*Економіко-гуманітарний університет в Варшаві (м. Варшава, Польща),
Херсонський навчально-науковий інститут, Національного університету
кораблебудування ім. адм. Макарова (м. Херсон, Україна)*

Дудченко О.М., канд. техн. наук,
ondudchenko@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7724-0892

*Херсонський навчально-науковий інститут, Національного університету
кораблебудування ім. адм. Макарова (м. Херсон, Україна)*

Литвиненко О.І., канд. техн. наук,
mmkntu@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9890-6959

*Херсонський навчально-науковий інститут, Національного університету
кораблебудування ім. адм. Макарова (м. Херсон, Україна)*

У роботі розглядаються серендипові скінченні елементи (CSE), які виникли наприкінці 60-х років минулого сторіччя як винахідлива модифікація лагранжових дво- і тривимірних елементів шляхом вилучення внутрішніх вузлів інтерполяції. Наведені в літературі базисні функції серендипових СЕ називають стандартними. Ці функції добре справляються з задачею ізопараметричного відображення квадрата у довільний чотирикутник, однак інтерполяційні якості стандартних базисів не завжди бездоганні. Всі стандартні базиси серендипових скінченних елементів, крім білінійного, мають недоліки. Побудову базисних функцій CSE, крім традиційних методів матричного аналізу, можна здійснити за допомогою процедури Тейлора. На жаль, створені обома способами поліноми вищих порядків мають певні недоліки: надмірну кількість кратних нулів у вузлах інтерполяції (жорстка модель) та від'ємні значення у розподілі рівномірної масової сили по вузлах (неприродний розподіл). Актуальною проблемою серендипової інтерполяції є розробка методів конструювання альтернативних базисів вищих порядків, позбавлених цих недоліків. Існування таких базисів було доведено на початку 80-х років XX сторіччя. Специфіка серендипових моделей змушує відмовитись від процедури Тейлора, що спирається на традиції одновимірної інтерполяції за Лагранжем. Лише на елементах першого і другого порядків результати обох підходів співпадають. Складні проблеми CSE вищих порядків краще розв'язувати методами прикладної геометрії.

На прикладі тривимірного скінченного елемента (32 вузла) аналізуються недоліки інтерполяційної процедури Тейлора. Запропоновано геометричний спосіб усунення недоліків класичного базису. Переваги геометричного конструювання ССЕ безперечні – з'являється можливість створення альтернативних базисів, позбавлених недоліків стандартних базисів. Більше того, вдале конструювання дозволяє оптимізувати базиси для отримання кращих інтерполяційних та обчислювальних якостей.

Ключові слова: серендипові скінченні елементи, інтерполяція, геометричне конструювання, процедури Тейлора, тривимірний скінченний елемент, альтернативний базис вищих порядків.

Постановка проблеми. У роботі розглядаються серендипові скінченні елементи (ССЕ), які виникли наприкінці 60-х років минулого сторіччя як винахідлива модифікація лагранжових дво- і тривимірних елементів шляхом вилучення внутрішніх вузлів інтерполяції. Побудову базисних функцій ССЕ можна здійснити за допомогою процедури Тейлора [1]. На жаль, створені таким чином поліноми вищих порядків мають певні недоліки: надмірну кількість кратних нулів у вузлах інтерполяції (жорстка модель) та від'ємні значення у розподілі рівномірної масової сили по вузлах (неприродний розподіл). Актуальною проблемою серендипової інтерполяції є розробка методів конструювання альтернативних базисів вищих порядків, позбавлених цих недоліків. Існування таких базисів було доведено на початку 80-х років XX сторіччя.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Історія ССЕ налічує 40 років. Більшість авторів книг з методу скінченних елементів (МСЕ) подають дуже обмежену інформацію про ССЕ, хоча визнають, що ці елементи популярні і корисні. Первісна мета створення ССЕ – зменшення обсягу обчислень за рахунок вилучення “зайвих” вузлів. Просто і зрозуміло про ССЕ написано в [2-5]. Ключові ідеї процедури Тейлора ілюструє приклад [3] побудови базису двовимірного ССЕ-8 (8 вузлів). Спроби геометричного конструювання ССЕ почалися в 1982 р. Залучення прямого геометричного конструювання дозволяє знаходити й описувати такі моделі ССЕ [6, 7], які проходять повз увагу дослідника при будь-якій спробі використати метод оберненої матриці. Відразу виявилися суттєві переваги перед традиційними процедурами саме на ССЕ вищих порядків. У результаті реалізації нової геометричної процедури були отримані базиси ССЕ, які не тільки задовольняють звичайним властивостям, які притаманні базисним функціям СЕ, але і мають додаткову властивість (якість) [8, 9].

Формулювання цілей статті. Мета статті – порівняти два різних підходи до побудови ССЕ з кубічним законом інтерполяції вздовж координатних напрямків x , y , z на границі ССЕ-32.

Основна частина. На рис.1 зображено трикубичний скінченний елемент серендипової сім'ї з 32-ма вузлами (ССЕ-32). В англomовній

літературі цей елемент позначають $H32$ (hexahedron).

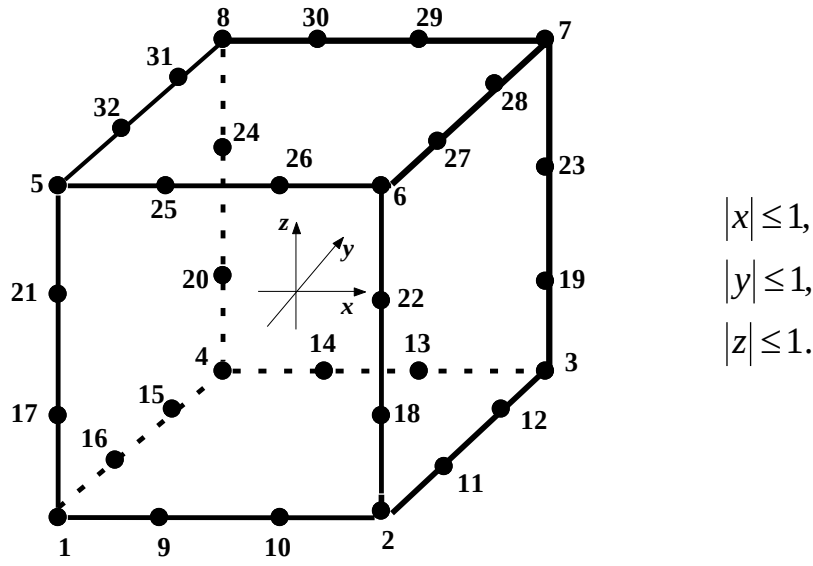


Рис.1. ССЕ з кубічним законом інтерполяції

Зауважимо, що відповідний лагранжевий елемент має вдвічі більше вузлів.

Базис ССЕ складається із 32 поліномів, які підпорядковані інтерполяційній гіпотезі:

$$N_i(x_k, y_k, z_k) = \delta_{ik}, \quad (1)$$

де i – номер полінома; k – номер вузла; δ_{ik} – символ Кронекера; $i, k = \overline{1, 32}$.

При цьому має зберігатися ваговий баланс:

$$\sum_{i=1}^{32} N_i(x, y, z) = 1. \quad (2)$$

Рівномірний розподіл вузлів забезпечує геометричну ізотропію моделі. Зрозуміло, що нам достатньо побудувати лише дві функції: для вершини куба і для проміжного вузла на ребрі.

Спочатку скористаємося процедурою Тейлора [1]. Побудова “проміжної” функції здійснюється методом відокремлення змінних. При цьому поліном Лагранжа 3-го степеня вздовж одного ребра перемножують з лінійними поліномами Лагранжа вздовж другого і третього напрямків. Наприклад,

$$\begin{aligned} N_9(x, y, z) &= \frac{9}{64} (1 - x^2)(1 - 3x)(1 - y)(1 - z), \\ N_{10}(x, y, z) &= \frac{9}{64} (1 - x^2)(1 + 3x)(1 - y)(1 - z), \\ N_{15}(x, y, z) &= \frac{9}{64} (1 - y^2)(1 + 3y)(1 - x)(1 - z), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
N_{16}(x, y, z) &= \frac{9}{64}(1 - y^2)(1 - 3y)(1 - x)(1 - z), \\
N_{17}(x, y, z) &= \frac{9}{64}(1 - z^2)(1 - 3z)(1 - x)(1 - y), \\
N_{21}(x, y, z) &= \frac{9}{64}(1 - z^2)(1 + 3z)(1 - x)(1 - y).
\end{aligned} \tag{3}$$

Для “кутової” функції, наприклад, $N_1(x, y, z)$, скористаємося лінійною комбінацією відомої функції трилінійної інтерполяції

$$\bar{N}_1(x, y, z) = \frac{1}{8}(1 - x)(1 - y)(1 - z)$$

і “проміжних” функцій (3). Вибір вагових коефіцієнтів лінійної комбінації обумовлюється інтерполяційною гіпотезою (1). Таким чином,

$$\begin{aligned}
N_1(x, y, z) &= \bar{N}_1(x, y, z) - \frac{1}{3}(N_{10}(x, y, z) + N_{15}(x, y, z) + N_{21}(x, y, z)) - \\
&\quad - \frac{2}{3}(N_9(x, y, z) + N_{16}(x, y, z) + N_{17}(x, y, z)).
\end{aligned}$$

Після нескладних перетворень отримаємо

$$N_1(x, y, z) = \frac{1}{64}(1 - x)(1 - y)(1 - z)(9(x^2 + y^2 + z^2) - 19). \tag{4}$$

Взагалі, для кутових вузлів $i = \overline{1, 8}$

$$\begin{aligned}
N_i(x, y, z) &= \frac{1}{64}(1 + x_i x)(1 + y_i y)(1 + z_i z)(9(x^2 + y^2 + z^2) - 19), \\
x_i, y_i, z_i &= \pm 1.
\end{aligned} \tag{5}$$

Для проміжних вузлів $i = 9, 10, 13, 14, 25, 26, 29, 30$

$$\begin{aligned}
N_i(x, y, z) &= \frac{9}{64}(1 - x^2)(1 + 9x_i x)(1 + y_i y)(1 + z_i z), \\
x_i &= \pm \frac{1}{3}; \quad y_i, z_i = \pm 1.
\end{aligned} \tag{6}$$

Решта функцій утворюються із (6) шляхом циклічного переставлення x, y, z .

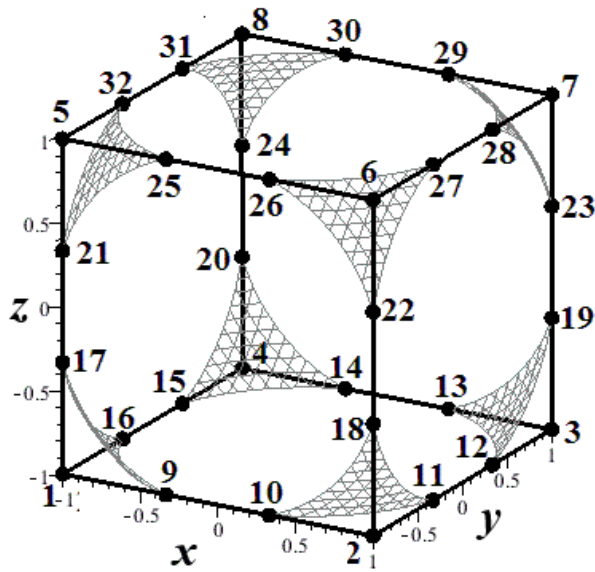
Варто зробити деякі зауваження до базисних поліномів Тейлора:

1. Виняткове значення має трилінійна функція $\bar{N}_i(x, y, z)$. Вона є складовою частиною будь-якого тривимірного ССЕ.

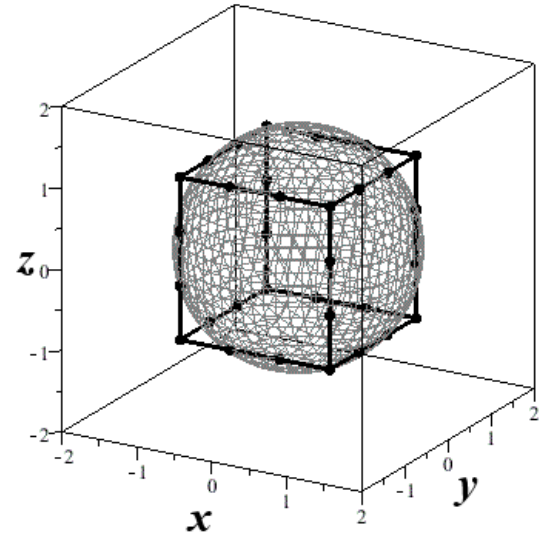
2. В кутових поліномах неважко помітити рівняння сфери

$$f_1 = (9(x^2 + y^2 + z^2) - 19),$$

яка проходить через всі проміжні вузли. Саме вона спричиняє виникнення небажаних кратних (подвійних та потрійних) нулів у вузлах 11, 12, 13, 14, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32 (рис. 2).



а) фрагмент поверхні f_1
всередині ССЕ



б) фрагмент поверхні f_1
в кубі $4 \times 4 \times 4$

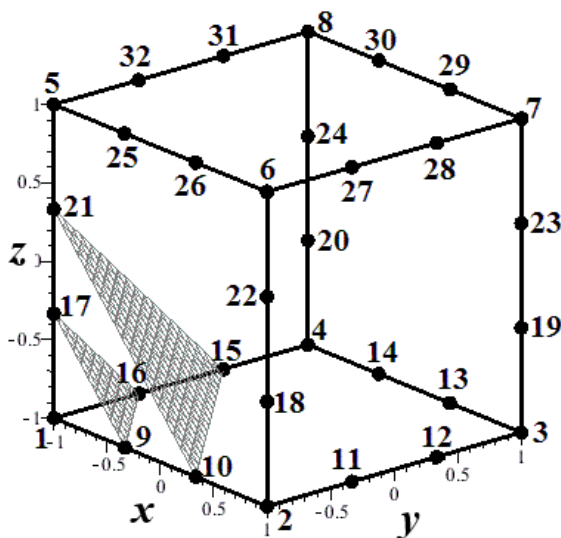
Рис. 2. Сфера

3. Модель (5), (6) має неприродний розподіл вузлових навантажень з від'ємними значеннями в кутових вузлах.

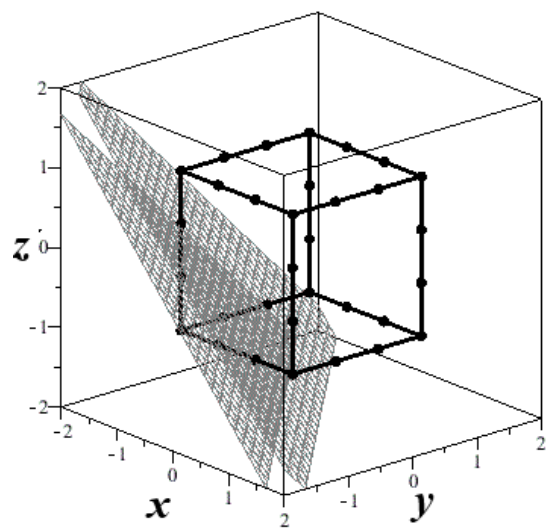
Геометричний аналіз поліномів (5), (6) стимулює пошуки інших композицій, що задовольняють вимогам (1), (2). Виявляється, що існує безліч альтернативних базисів. Наприклад, для вузла 1 замість сфери краще взяти дві площини

$$f_1 = (9(2 + x + y + z)^2 - 1),$$

одна з яких проходить через вузли 9, 16, 17, а інша – через вузли 10, 15, 21 (рис. 3).



а) фрагмент поверхні f_1
всередині ССЕ



б) фрагмент поверхні f_1
в кубі $4 \times 4 \times 4$

Рис. 3. Дві паралельні площини

Тоді

$$N_1(x, y, z) = \frac{1}{64}(1-x)(1-y)(1-z)(9(2+x+y+z)^2 - 1). \quad (7)$$

Взагалі, для кутових вузлів аналог формули (5) має вигляд:

$$N_i(x, y, z) = \frac{1}{64}(1+x_i x)(1+y_i y)(1+z_i z)(9(2-x_i x - y_i y - z_i z)^2 - 1). \quad (8)$$

Для проміжних вузлів $i = 9, 10, 13, 14, 25, 26, 29, 30$

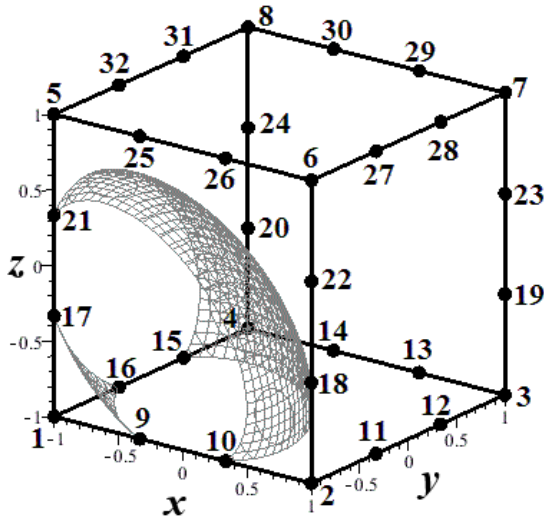
$$N_i(x, y, z) = \frac{9}{64}(1-x^2)(1+y_i y)(1+z_i z)(9x_i x + y_i y + z_i z - 1). \quad (9)$$

Це аналог формули (6). Проміжну функцію можна створити виключно із рівнянь площин. Наприклад, $N_9(x, y, z)$ містить рівняння чотирьох граней, що не проходять через вузол 9, і площини, що проходить через вузли 10, 14, 25. У порівнянні з поліномом (5) кількість кратних нулів полінома (8) суттєво зменшилась. Розподіл рівномірної масової сили по вузлах цілком природний. Наявність двох базисів (5), (6) і (8), (9) дає можливість генерувати безліч нових базисів за формулою зваженого усереднення:

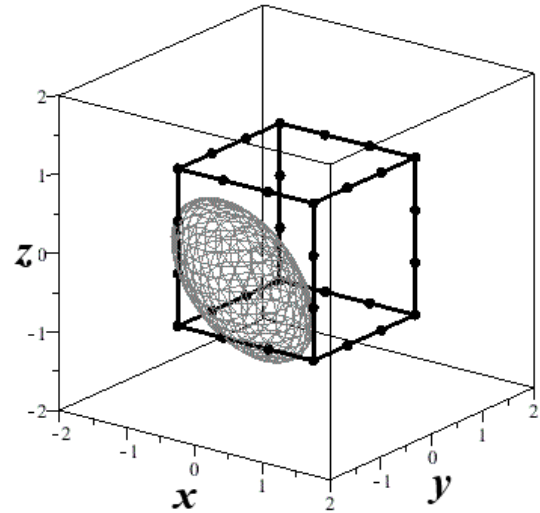
$$N_i(x, y, z) = \alpha N_i^{(1)}(x, y, z) + (1-\alpha) N_i^{(2)}(x, y, z), \quad (10)$$

де $N_i^{(1)}(x, y, z)$ – функції першого базису, $N_i^{(2)}(x, y, z)$ – функції другого базису, α – ваговий коефіцієнт ($0 \leq \alpha \leq 1$). Цікаво відзначити, що “суміш” сфери від моделі (5) і двох паралельних площин від моделі (8) дає еліпсоїд (рис. 4):

$$f_1 = (9(x^2 + y^2 + z^2) + 9(xy + xz + yz) + 18(x + y + z) + 8).$$



а) фрагмент поверхні f_1
всередині ССЕ



б) фрагмент поверхні f_1
в кубі $4 \times 4 \times 4$

Рис. 4. Еліпсоїд

В цьому випадку для кутових вузлів маємо:

$$N_i(x, y, z) = \frac{1}{64}(1 + x_i x)(1 + y_i y)(1 + z_i z)(9(x^2 + y^2 + z^2) + 9(x_i x y_i y + x_i x z_i z + y_i y z_i z) - 18(x_i x + y_i y + z_i z) + 8). \quad (11)$$

$$i = \overline{1, 8}; \quad x_i, y_i, z_i = \pm 1.$$

Зрозуміло, що формула (10) не залежить від вимірності простору і моделі елемента. Вона створює привабливі можливості для розв'язування задач оптимізації базисів [6].

Висновки. Специфіка серендипових моделей змушує відмовитись від процедури Тейлора, що спирається на традиції одновимірної інтерполяції за Лагранжем. Переваги геометричного конструювання ССЕ безперечні. Лише на елементах першого і другого порядків результати обох підходів співпадають. Складні проблеми ССЕ вищих порядків краще розв'язувати методами прикладної геометрії [7, 8].

Література

1. Taylor R.L. On the Completeness of Shape Functions for Finite Element Analysis. *Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1972, Vol.4. No.1. P. 17-22.
2. Strang G., Fix, G. J. An Analysis of the Finite Element Method. New Jersey : Prentice-Hall. 1973. 349 p.
3. Mitchell A.R., Wait R. The Finite Element Method in Partial Differential Equations. London : Wiley, 1977. 216 p.
4. Norrie D.H., de Vries G. An Introduction to Finite Element Analysis. Academic Prees. N.Y., 1978. 304 p.
5. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. (Ed.). The Finite Element Method. (Vols. 1-2). Butterworth-Heinemann, 2000.
6. Akin I.E. Finite Element Analysis with Error Estimators. Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2005. 477 p.
7. Onate E. Structural Analysis with the Finite Element Method. Heidelberg : Springer Netherlands, 2009. Vol. 1. 446 p.
8. Astionenko I.O., Litvinenko O.I., Osipova N.V., Tuluchenko G.Ya., Khomchenko A.N. Cognitive-graphic Method for Constructing of Hierarchical Form of Basic Functions of Biquadratic Finite Element. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences* : AIP Conference Proceedings report. 22–27 июня 2016 г. Албена, Болгария. 2016. Vol. 1773. P. 040002-1 – 040002-11. DOI: 10.1063/1.4964965.
9. Guchek P., Litvinenko O., Astionenko I., Dudchenko O., Khomchenko A. Research of Alternative Models of Serendipity Finite Elements Using Model Problems. In: So In, C., Londhe, N.D., Bhatt, N., Kitsing, M. (eds). Information Systems for Intelligent Systems. ISBM 2023. *Smart Innovation, Systems and Technologies*. 2024. Vol. 379. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-99-8612-5_38.

GEOMETRIC METHOD FOR CONSTRUCTING THE BASIS OF THE DISCRETE ELEMENT H32

Ihor Astionenko, Petro Huchek, Oleg Dudchenko, Olena Lytvynenko

This work examines serendipity finite elements (SFEs), which emerged in the late 1960s as an ingenious modification of Lagrangian two- and three-dimensional elements through the removal of internal interpolation nodes. The basis functions of serendipity finite elements found in the literature are referred to as standard functions. These functions are well-suited for the task of isoparametric mapping of a square into an arbitrary quadrilateral; however, the interpolation quality of standard bases is not always flawless. All standard bases of serendipity finite elements, except for the bilinear one, have disadvantages. The construction of SFE basis functions, in addition to traditional methods of matrix analysis, can also be performed using the Taylor series procedure. Unfortunately, polynomials created by both methods for higher-order elements exhibit certain drawbacks: an excessive number of multiple zeros at interpolation nodes (rigid model) and negative values when distributing uniform body forces among the nodes (unnatural distribution). A relevant issue in serendipity interpolation is the development of methods for constructing alternative higher-order bases that are free from these drawbacks. The existence of such bases was proven in the early 1980s. The specific nature of serendipity models requires abandoning the Taylor procedure, which is based on one-dimensional Lagrangian interpolation traditions. Only for first- and second-order elements do the results of both approaches coincide. Complex problems of higher-order SFEs are better addressed using methods of applied geometry. Using the example of a three-dimensional finite element with 32 nodes, the deficiencies of the Taylor interpolation procedure are analyzed. A geometric method for eliminating the shortcomings of the classical basis is proposed. The advantages of geometric construction of SFEs are undeniable – it enables the creation of alternative bases that are free from the limitations of standard bases. Moreover, successful geometric design makes it possible to optimize bases for improved interpolation and computational performance.

Key words: serendipity finite elements, interpolation, geometric construction, Taylor procedures, three-dimensional finite element, alternative higher-order basis.

References

1. Taylor, R.L. (1972). On the Completeness of Shape Functions for Finite Element Analysis, *Journal for Numerical Methods in Engineering*, 4 (1), 17-22. [In English]
2. Strang, G., & Fix, G. J. (1973). *An Analysis of the Finite Element Method*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. [In English]
3. Mitchell, A.R., & Wait, R. (1977). *The Finite Element Method in Partial Differential Equations*, London : Wiley. [In English]
4. Norrie, D.H., & de Vries, G. (1978). *An Introduction to Finite Element Analysis*. Academic Prees. N.Y. [In English]
5. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. (Ed.). (2000). *The Finite Element Method*. (Vols. 1-2). Butterworth-Heinemann. [In English]
6. Akin, I.E. (2005). *Finite Element Analysis with Error Estimators*. Elsevier, Butterworth-Heinemann. [In English]
7. Onate, E. (2009). *Structural Analysis with the Finite Element Method*. (Vols. 1). Heidelberg : Springer Netherlands. [In English]
8. Astionenko, I.O., Litvinenko, O.I., Osipova, N.V., Tuluchenko, G.Ya., & Khomchenko, A.N. (2016). Cognitive-graphic Method for Constructing of Hierarchical Form of Basic Functions of Biquadratic Finite Element. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*. Proceedings of the AIP Conference Proceedings report. Albena, Bulgaria, 1773. DOI: 10.1063/1.4964965. [In English]
9. Guchek, P., Litvinenko, O., Astionenko, I., Dudchenko, O., Khomchenko, A. (2024). Research of Alternative Models of Serendipity Finite Elements Using Model Problems. In: So In, C., Londhe, N.D., Bhatt, N., Kitsing, M. (eds) *Information Systems for Intelligent Systems*. ISBM 2023. *Smart Innovation, Systems and Technologies*, 379, 471-481. Springer, Singapore. DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-99-8612-5_38. [In English]