УДК 537.8

ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ КІЛ СИЛОВИХ ВИПРЯМЛЯЧІВ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЗМІННИХ

Бондар О.І., канд. техн. наук,
Bondardiit@gmail.com, ORCID: 0000-0003-3884-5589
Український державний університет науки і технологій, (м. Дніпро, Україна)
Коваленко В.Л., д-р. техн. наук,
victor.l.kovalenko@gmail.com, ORCID: 0000-0001-5950-4412
Кокович Б.О.,
kokovych@gmail.com, ORCID: 0009-0003-6714-3663
Коляденко О.А.,
kolyadenko.aleks@gmail.com, ORCID: 0009-0006-1983-8673
Верьовкін О.В.,
alex1monya@gmail.com, ORCID: 0009-0004-4253-9802
Касьянов М.О.,
Kasianovmax13@gmail.com, ORCID: 0009-0007-6764-4651
Запорізький національний університет, (м. Запоріжжя, Україна)

У статті наведено приклад чисельного моделювання конкретної топології силового випрямляча з навантаженням, що включає елементи з нелінійною вольт-амперною характеристикою. Схема охоплює реактивні компоненти (індуктивності, ємності), а також напівпровідникові пристрої, динаміка яких визначається не тільки характеристиками керування, але й внутрішніми електрофізичними властивостями. З метою спрощення математичного опису нелінійної моделі було застосовано метод перетворення змінних, який дозволяє звести диференціальні рівняння до вигляду, придатного для чисельного інтегрування з контрольованим рівнем похибки, що особливо актуально в умовах обмежених обчислювальних ресурсів.

Аналіз результатів моделювання дав змогу виявити характерні особливості електромагнітних процесів, які виникають у колі в режимах, близьких до резонансних або граничних. Було показано умови, за яких з'являються стаціонарні коливання, що супроводжуються ефектами гістерезису, магнітного насичення та коливальної нестійкості. Отримано фазові портрети та часові графіки, що демонструють перехід від регулярної роботи до автоколивального або хаотичного режиму залежно від параметрів схеми. Порівняння результатів до і після застосування перетворення змінних засвідчило зростання точності, покращення числової

стійкості та зменшення витрат обчислювального часу.

Зазначений підхід підтвердив свою ефективність для аналізу складних нелінійних процесів у силових електронних колах. Його можна використовувати в проєктуванні адаптивних систем електроприводу, при моделюванні енергетичних перетворювачів, схем керування зворотним зв'язком, а також у навчальному процесі для демонстрації динаміки перехідних процесів в електротехнічних системах, де важливо розуміти поведінку нелінійних ланок. Такий метод має потенціал до подальшої адаптації в середовищах автоматизованого проєктування та цифрового моделювання енергетичних систем.

Ключові слова: числове моделювання, нелінійні електричні кола, силовий випрямляч, фазовий портрет, перетворення змінних, автоколивання.

Постановка проблеми. Упродовж останніх десятиліть відзначається інтенсивний розвиток чисельних методів аналізу нелінійних електричних кіл, зумовлений стрімким прогресом обчислювальної техніки та програмного забезпечення. Сучасні ЕОМ дозволяють виконувати складні розрахунки з високою точністю та оперативністю, через що аналітичні методи, які раніше домінували в теоретичній електротехніці, поступово втратили провідні позиції [1].

Попри безперечні переваги, чисельні підходи мають суттєві обмеження. По-перше, вони не дають універсальних аналітичних виразів, що цілісно описують поведінку нелінійної системи у всьому діапазоні режимів. По-друге, відсутність таких виразів ускладнює побудову узагальнених критеріїв оцінки електричних процесів, особливо у стаціонарних і перехідних режимах, де спостерігаються коливання, зсуви фаз і нелінійні деформації сигналів. Чисельні результати найчастіше характеризують окремі сценарії або короткі часові інтервали й не розкривають прихованих закономірностей.

Крім того, вивчення нових нелінійних ефектів – гістерезису, магнітного насичення, автоколивальної чи хаотичної нестійкості – потребує не лише точних обчислень, а й глибокого фізичного розуміння процесів. Без фундаментального аналітичного опису складно сформулювати гіпотези, що пояснювали б спостережувані явища чи передбачали б нові ефекти при зміні параметрів. Отже, чисельні методи залишаються потужним інструментом інженерного розрахунку, однак не можуть повністю замінити аналітичні підходи у задачах глибокого теоретичного аналізу. Це визначає потребу в інтеграції аналітичних, наближених і чисельно-аналітичних методів, здатних розширити межі сучасної електротехнічної науки.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Зростаючий інтерес науковців до комбінованих підходів підтверджують недавні роботи [2], [3], де показано ефективність повернення до фундаментальної аналітики з

одночасним використанням можливостей комп'ютерного моделювання. Такі підходи забезпечують не лише точність або наближену оцінку розв'язків, а й глибше розуміння природи електромагнітних процесів.

Перспективними виявилися методи, що поєднують лінеаризацію нелінійних систем у нових змінних з подальшим чисельним інтегруванням. Зокрема, метод фазових інтегралів [4] у механіці довів здатність трансформувати нелінійні диференціальні рівняння до лінійних, що суттєво полегшує аналіз складних динамічних режимів [5], [6]. Проте для електротехнічних задач подібне узагальнення досі недостатньо досліджене.

У цьому контексті запропонований у даній роботі підхід розвиває ідею методу фазових інтегралів та адаптує її до аналізу нелінійних електричних кіл. Його мета – об'єднати аналітичну гнучкість із числовою стійкістю, що відкриває можливості для достовірного моделювання складних процесів у силовій електроніці, електроприводі та енергетичних перетворювачах, а також для використання у навчальному процесі з електротехнічних дисциплін.

Формулювання цілей статті. Мета дослідження - розробка та обґрунтування нового аналітичного підходу до моделювання та аналізу нелінійних електричних кіл силових випрямлячів на основі узагальненого методу фазових інтегралів шляхом перетворення змінних, що дозволяє лінеаризувати систему та забезпечити більш глибоке розуміння електричних процесів у стаціонарних і перехідних режимах.

Основна частина. Практичну реалізацію запропонованого підходу можна продемонструвати на прикладі силового напівпровідникового випрямляча, що використовується в системах електроживлення тягових електродвигунів. Цей елемент є типовим прикладом нелінійної ланки в силових колах. На рисунку 1 подано спрощену схему випрямляча з активно-індуктивним навантаженням і ємнісним фільтром. Для спрощення аналізу електрорушійну силу двигуна (проти-ЕРС) прийнято сталою величиною, що відповідає сталошвидкісному руху електротранспорту на рівній ділянці шляху.

Запропонований метод аналізу нелінійних електричних кіл має низку важливих переваг, що роблять його ефективним інструментом як для теоретичних досліджень, так і для інженерної практики. Передусім, він дозволяє значно спростити процес побудови аналітичного опису електричних процесів, що відбуваються у складних нелінійних схемах. Традиційно такі кола характеризуються наявністю сильно нелінійних залежностей між напругою та струмом, що робить їх математичний опис надзвичайно складним і громіздким. Однак застосування методу перетворення змінних дозволяє лінеаризувати початкову систему рівнянь, перевівши її у зручну для аналізу форму, де зв'язки між змінними мають лінійний характер.

Це значно полегшує проведення подальших математичних операцій, таких як інтегрування, диференціювання, пошук стаціонарних точок, аналіз стійкості та інших характеристик. Таким чином, дослідник отримує у своє розпорядження не лише спрощену, а й формально точну модель, яка дає змогу повноцінно описати динаміку кола в аналітичному вигляді. Такі вирази можуть бути адаптовані для аналізу як стаціонарних, так і перехідних режимів, що робить метод універсальним у застосуванні.

Крім того, одержані аналітичні формули мають узагальнений характер. Це означає, що замість отримання точкових числових рішень у межах вузького діапазону параметрів, дослідник має змогу охопити всю систему в широкому діапазоні змін - з можливістю аналізу впливу початкових умов, зовнішніх впливів, параметричних збурень тощо. Така узагальненість відкриває нові горизонти в аналізі складних електротехнічних систем, дозволяючи будувати універсальні критерії ефективності, надійності та енергоекономічності.

Завдяки такій гнучкості запропонований метод набуває великої практичної цінності для інженерів і конструкторів, які займаються моделюванням та оптимізацією електронних пристроїв - від силових випрямлячів до перетворювачів частоти та імпульсних джерел живлення. Його застосування дозволяє ще на етапі проектування отримати точну модель майбутнього пристрою, передбачити критичні режими роботи, провести чутливісний аналіз параметрів і мінімізувати ймовірність помилок при подальшій реалізації.

Таким чином, запропонований метод не лише підвищує точність аналітичного опису, а й значно розширює можливості дослідника в плані глибини розуміння та ефективності практичного застосування. Це створює передумови для формування нового підходу до дослідження та проектування нелінійних електричних систем, який поєднує фундаментальну математичну строгість з прикладною гнучкістю.

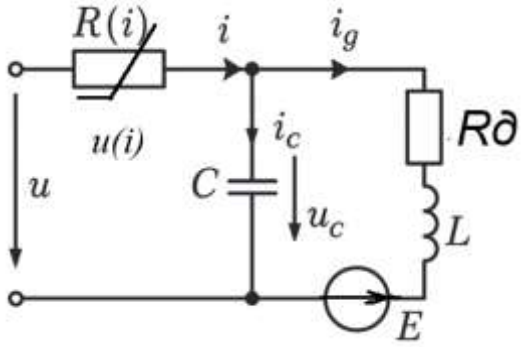

Рис. 1. Спрощена схема випрямляча з активно-індуктивним навантаженням і ємнісним фільтром

На наведеній схемі зображено електричне коло, яке є характерним прикладом силової частини системи живлення тягового електродвигуна, що працює на постійному струмі. Воно містить кілька основних елементів, кожен із яких відіграє важливу роль у динаміці процесів, що протікають у колі. Структурно схема складається з послідовного з'єднання нелінійного резистора *R(i)*, що виконує роль напівпровідникового діода із заданою вольт-амперною характеристикою $u_R(i)$, а також з розгалуженої ділянки кола, яка включає фільтруючий конденсатор *C*, індуктивність *L*, активний опір *Ra*_та джерело проти-ЕРС *E*, що моделює електродвигун постійного струму.

Нелінійний резистор *R(i)*, розташований у вхідному ланцюгу, моделює поведінку силового напівпровідникового елемента - зокрема, діода або тиристора, що виконує функцію керованого або некерованого випрямлення. Його вольт-амперна характеристика, як правило, визначається експериментально або аналітично, і задається як функція струму: $u_R=f(i)$. Саме ця нелінійність формує основні складнощі в математичному аналізі системи, адже залежність напруги від струму не є лінійною і потребує спеціального підходу до розрахунків.

Після діода струм розгалужується на дві гілки. Перша - це гілка з конденсатором *C*, яка забезпечує фільтрацію пульсацій вихідної напруги та тим самим стабілізує електричний режим споживача. Конденсатор відіграє роль накопичувача енергії, забезпечуючи підтримку напруги на навантаженні навіть у разі короткочасних змін у вхідному сигналі.

Друга гілка включає індуктивність *L*, активний опір *Ra*, що відображає опір обмотки тягового електродвигуна, та джерело проти-ЕРС *E*, яке симулює дію самого двигуна під час його руху з певною сталою швидкістю. Врахування проти-ЕРС є важливим елементом при моделюванні, оскільки вона істотно впливає на перерозподіл струмів у системі, а також на загальний режим її функціонування. Індуктивність *L* враховує електромагнітні процеси в обмотках двигуна, зокрема - акумулювання і зворотне виділення енергії магнітного поля, а *Ra*_ визначає теплові втрати у провіднику.

На схемі позначено такі струми: загальний струм *i*, який протікає через діод; струм i_c, що проходить через конденсатор; струм *ig*, який тече через індуктивну гілку. Напруга на конденсаторі позначена як u_c. Спостерігається розгалуження струму після нелінійного елемента, що є типовим для фільтрованих випрямлячів, де частина енергії спрямовується безпосередньо на навантаження, а інша - використовується для зарядки фільтраційного елементу.

Такий тип схеми широко застосовується в силовій електроніці, зокрема в системах живлення тягових електродвигунів, перетворювачах напруги, промислових імпульсних джерелах живлення, а також у високоефективних енергетичних установках. Її аналіз вимагає врахування складних динамічних

процесів, зокрема переходів між режимами провідності діода, накопичення і віддачі енергії індуктивністю, зарядження та розрядження конденсатора, а також впливу ЕРС, що накладається на загальний розподіл струмів у системі.

Таким чином, дана електрична схема являє собою реалістичну і складну модель силового випрямляча, яка містить усі основні нелінійні та реактивні елементи, характерні для сучасних енергетичних пристроїв. Її точний аналітичний аналіз становить актуальну наукову та практичну задачу, що потребує застосування спеціальних методів моделювання, таких як метод фазових інтегралів у змінних, які лінеаризують опис системи та дозволяють ефективно розв'язувати задачу в широкому діапазоні параметрів.

Електричний стан зображеної схеми описується нелінійною системою диференційних рівнянь.

$$\left.\begin{aligned} i &= i_C + i_\partial \\ u &= u_R + u_C \\ E + R_\partial i_\partial + L\frac{di_\partial}{dt} &= u_C \\ i_C &= C\frac{du_C}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Приймемо закон зміни напруги живлення установки синусоїдним:

$$u = U_m \sin\omega t.$$

Зведемо систему (1) до нелінійного рівняння відносно струму випрямляча $i(t)$. Для цього визначимо струм i_∂ як

$$i_\partial = i - C\frac{du_C}{dt},$$

а

$$u_C = u - u_R.$$

Таким чином отримаємо:

$$i_\partial = i - C\frac{du}{dt} + \tau_{\partial un}\frac{di}{dt}$$

де $\tau_{\partial ин} = Cr_{\partial ин}$ має розмірність часу, $r_{\partial un}\frac{du_R}{di}$ - динамічний опір нелінійного резистора.

Шляхом алгебраїчних перетворень отримаємо нелінійне диференційне рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{R_\partial}{L} + \frac{l}{\tau_{\text{дин}}}\right)\frac{di}{dt} + \frac{R_\partial}{L\tau_{\text{дин}}}i = (u - u_R - E + R_\partial C\frac{du}{dt} + LC\frac{d^2u}{dt^2})\frac{1}{L\tau_{\text{дин}}}. \qquad (2)$$

Праву частину (2) можна дещо спростити з урахуванням синусоїдного закону вхідної напруги. Маємо:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{R_\partial}{L} + \frac{l}{\tau_{\text{дин}}}\right)\frac{di}{dt} + \frac{R_\partial}{L\tau_{\text{дин}}}i + (u_R + E) \times \frac{1}{L\tau_{\text{дин}}} =$$
$$= \frac{1}{L\tau_{\text{дин}}}U_m\sqrt{(1-\omega^2LC)^2 + (R_\partial\omega C)^2} \times \sin(\omega t + \psi), \qquad (3)$$

де

$$\psi = \mathrm{arctg}\frac{R_\partial \omega C}{1-\omega^2 LC}.$$

Для спрощення подальших викладок позначимо:

$$x = i(t),\ \dot{x} = \frac{di}{dt},\ \ddot{x} = \frac{d^2 i}{dt^2}.$$

Перепишемо рівняння (3) у вигляді:

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + V(x) = A\sin(\omega t + \psi), \tag{4}$$

де $a = \frac{1}{2}\left(\frac{R_\partial}{L} + \frac{1}{\tau_{\text{дин}}}\right) = \frac{1}{2}\left(R_\partial \tau_{\text{дин}} + L\right)\chi$ – коефіцієнт демпфування;

$V(x) = \chi(u_R \mp E + R_\partial \chi)$ – потенціальна функція;

$A = \chi U_m \sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (R_\partial \omega C)^2}$ – амплітуда зовнішнього впливу;

$\chi = \frac{1}{L\tau_{\text{дин}}}$ – характерний коефіцієнт системи.

Отримане рівняння (4) - нелінійне, диференційне, другого порядку. Скористуємось заміною:

$$z(\varepsilon) = e^{at} f(x), \varepsilon = \varphi(t) \tag{5}$$

і зведемо його до лінійного

$$\frac{d^2 z}{d\varepsilon^2} + z(\varepsilon) = H(\varepsilon). \tag{6}$$

У подальших викладках похідну по x (або по ε) позначатимемо штрихом:

$$\frac{dz}{d\varepsilon} = z'.$$

Функцію $f(x)$ назвемо амплітудною функцією, а $\varphi(t)$ фазовою функцією. Продиференцюємо двічі по ε перше співвідношення (5)

$$\frac{dz}{d\varepsilon} = \frac{dz}{dt}\cdot\frac{dt}{d\varepsilon} = e^{at}(af + f'\dot{x})\frac{l}{\dot{\varphi}},$$

$$\frac{d^2 z}{d\varepsilon^2} = \frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{dz}{d\varepsilon}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{d\varepsilon}\right)\frac{dt}{d\varepsilon} = \frac{e^{at} f'}{\dot{\varphi}^2}\left[\ddot{x} + \left(\frac{f^*}{f'}\dot{x} + 2a - \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}\right)\dot{x} + \frac{af}{f'}\left(a - \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}\right)\right].$$

Підставивши останній вираз, а також першу формулу (5) в рівняння (6), отримаємо

$$\ddot{x} + \left(\frac{f^*}{f'}\dot{x} - \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} + 2a\right)\dot{x} + \frac{f}{f'}\left(a^2 + \dot{\varphi}^2 - \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}a\right) = \frac{\dot{\varphi}^2}{f'}e^{-at}H(\varepsilon). \tag{7}$$

Порівнюючи рівняння (4) та (7), зазначимо їх співпадання при виконанні умов

$$\frac{f^*}{f'}\dot{x} - \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} + 2a = 2a, \tag{8}$$

$$\frac{f}{f'}\left(a^2 + \dot{\varphi}^2 - a\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}\right) = V(x), \tag{9}$$

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{f'}e^{-at}H(\varepsilon) = A\sin(\omega t + \psi) = A\cos\eta(t), \tag{10}$$

де $\eta(t) = \omega t + \psi - \pi/2$.

З умови (8) отримаємо

$$\frac{f^*}{f'}\dot{x} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}}$$

Представимо цей вираз у вигляді

$$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{1}{f'(x)}\cdot\frac{df'(x)}{dx} = \frac{1}{\dot{\varphi}(t)}\cdot\frac{d\dot{\varphi}(t)}{dt}$$

тобто

$$\frac{df'(x)}{f'(x)} = \frac{d\dot{\varphi}(t)}{\dot{\varphi}(t)}.$$

Інтегруючи, отримаємо

$$\ln f'(x) = \ln\dot{\varphi}(t) + C_0.$$

Вважаючи довільну сталу рівною нулеві ($C_0 = 0$), приходимо до рівняння

$$f'(x) = \dot{\varphi}(t). \tag{11}$$

Використовуючи співвідношення (10) та (11), отримаємо вираз для правої частини рівняння (6)

$$H(\varepsilon) = \frac{A}{\phi}e^{\sigma t}\cos\eta(t). \tag{12}$$

Якщо лінеаризувати фазову функцію

$$\varepsilon = \varphi(t) \approx \theta(t). \tag{13}$$

то після диференціювання за часом будемо мати

$$\dot{\varphi}(t) \approx \theta, \tag{14}$$

де θ - частота вільних коливань.

Крім того, наближена рівність (13) дозволяє записати співвідношення

$$t = \frac{\varepsilon}{\theta}. \tag{15}$$

Підставляючи рівність (12) у формулу (6) і враховуючи співвідношення (14) та (15), маємо рівняння (за умови початкової фази $\psi - \pi/2 = 0$)

$$z''(\varepsilon) + z(\varepsilon) = \frac{A}{\theta}e^{\frac{\sigma}{\theta}\varepsilon}\cos\frac{\omega}{\theta}\varepsilon. \tag{16}$$

Стаціонарні коливання визначаються частинним розв'язком рівняння (16), який уявимо виразом

$$z = \left(D_1\cos\frac{\omega}{\theta}\varepsilon + D_2\sin\frac{\omega}{\theta}\varepsilon\right)e^{\frac{\sigma}{\theta}\varepsilon}, \tag{17}$$

де D_1 та D_2 - довільні сталі інтегрування.

Якщо продиференціювати двічі по ε і підставити результат та вираз (17) у рівняння (16), то отримаємо:

$$\left(\frac{a^2}{\theta^2}-\frac{\omega^2}{\theta^2}+1\right)\left(D_1\cos\frac{\omega}{\theta}\varepsilon+D_2\sin\frac{\omega}{\theta}\varepsilon\right)+$$
$$+2\frac{a\omega}{\theta^2}\left(D_2\cos\frac{\omega}{\theta}\varepsilon-D_1\sin\frac{\omega}{\theta}\varepsilon\right)=\frac{A}{\theta}\cos\frac{\omega}{\theta}\varepsilon.$$

Прирівнюючи до нуля аргумент тригонометричних функцій, отримаємо алгебраїчну систему для визначення сталих інтегрування

$$\begin{cases} D_1\left(\frac{a^2}{\theta^2}-\frac{\omega^2}{\theta^2}+1\right)+2\frac{a\omega}{\theta^2}D_2=\frac{A}{\theta} \\ D_2\left(\frac{a^2}{\theta^2}-\frac{\omega^2}{\theta^2}+1\right)-2\frac{a\omega}{\theta^2}D_1=0. \end{cases}$$

Розв'язуючи останню систему, маємо

$$D_1=\frac{(a^2-\omega^2+\theta^2)\theta A}{(a^2-\omega^2+\theta^2)^2+4a^2\omega^2}\ ;$$
$$D_2=\frac{2a\omega\theta A}{(a^2-\omega^2+\theta^2)^2+4a^2\omega^2}\ . \qquad (18)$$

Частинний розв'язок рівняння (16) можна представити в одночленному виді

$$z=Me^{\frac{\sigma}{\theta}\varepsilon}\cos\left(\frac{\omega}{\theta}\varepsilon-\rho\right) \qquad (19)$$

де

$$M=\sqrt{D_1^2+D_2^2},$$
$$\rho=\mathrm{arctg}\frac{D_2}{D_1}=\mathrm{arctg}\frac{2a\omega}{a^2-\omega^2+\theta^2}.$$

Тобто сталі інтегрування

$$D_1=M\cos\rho, D_2=M\sin\rho \qquad (20)$$
$$M=\sqrt{D_1^2+D_2^2}=\frac{\theta A}{\sqrt{(a^2-\omega^2+\theta^2)^2+4a^2\omega^2}} \qquad (21)$$

Підставляючи останній вираз в (19) і повертаючись до попередніх змінних у відповідності з формулами (15) та (5), знаходимо розв'язок для стаціонарних коливань у вигляді

$$f(x)=\frac{\theta A\cos(\omega t-\rho)}{\sqrt{(a^2-\omega^2+\theta^2)^2+4a^2\omega^2}}. \qquad (22)$$

Для отримання рівняння амплітудно-частотної характеристики приймемо $x=K, \cos(\omega t-\rho)=1$.

Тоді

$$f(K)=\pm\frac{\theta A}{\sqrt{(a^2-\omega^2+\theta^2)^2+4a^2\omega^2}}. \qquad (23)$$

В разі спрощення рівняння (4) до виду:

$$\ddot{x} + F(x) = A\sin(\omega t + \psi) \tag{24}$$

що має місце при живленні LC - кола через діод, розв'язок задачі значно спрощується. Нелінійне рівняння (24) зводитіся до лінійного:

$$z''(\varepsilon) + z(\varepsilon) = \frac{A}{\phi}\sin\omega t. \tag{25}$$

Враховуючи співвідношення (14) та (15), рівняння (25) представимо у вигляді:

$$z''(\varepsilon) + z(\varepsilon) = \frac{A}{\theta}\sin\frac{\omega}{\theta}\varepsilon\,. \tag{26}$$

Стаціонарні коливання визначаються виразом:

$$z = B_1\sin\frac{\omega}{\theta}\varepsilon \tag{27}$$

де B_1 - стала інтегрування.

Остання може бути визначена підстановкою формули (27) в рівняння (26) і прийняттям

$$\sin\frac{\omega}{\theta}\varepsilon = 1,$$

тоді

$$B_1 = \frac{A}{\theta\left(1 - \frac{\omega^2}{\theta^2}\right)}.$$

і розв'язок рівняння (26) набуває виду:

$$z = \frac{\theta A}{\theta^2 - \omega^2}\sin\frac{\omega}{\theta}\varepsilon. \tag{28}$$

Переходимо до змінних у відповідності з формулою (5) при $a = 0$ та припущенням (13) і записуємо розв'язок (28) для стаціонарних коливань, вважаючи, що вільні коливання згасли

$$f(x) = \frac{\theta A}{\theta^2 - \omega^2}\sin\omega t\,. \tag{29}$$

Амплітудну функцію $f(x)$ знайдемо з виразу (9) за умови $a = 0$, тобто

$$\frac{f(x)}{f'(x)}\dot{\varphi}^2(t) = F(x),$$

котрий з урахуванням формули (11) можна переписати так:

$$fdf = F(x)dx.$$

Інтегруючи цей вираз, отримаємо:

$$\frac{f^2}{2} = \int F(x)dx + B_2,$$

звідки маємо:

$$f(x)' = \left[2\int F(x)dx + B\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{30}$$

де $B = 2B_2$.

Як показано в роботі [5], довільна стала інтегрування може приймати будь-які значення, що відповідає довільному вибору початку координат. Зокрема, при $B = 0$ формула (30) набуває вигляду:

$$f(x) = \left[2\int F(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{31}$$

Приймемо у розв'язку (28) значення $x = K$ та $\sin\omega t = 1$ і отримаємо рівняння амплітудно-частотної характеристики:

$$f(K) = \frac{\theta A}{\theta^2 - \omega^2}. \tag{32}$$

що встановлює залежність між амплітудою K стаціонарних коливань, частотою збурення ω та частотою вільних коливань θ, що в свою чергу залежить від амплітуди.

У нестаціонарному (перехідному) режимі розв'язок рівняння (6) набуває визначеності при заданих початкових умовах . Скористаємось рішенням (17) з урахуванням замін (5), тобто

$$f(x) = D_1\cos\varphi(t) + D_2\sin\varphi(t). \tag{33}$$

Продиференцюємо це рівняння по незалежній змінній t:

$$f'(x)\dot{x} = [-D_1\sin\varphi(t) + D_2\cos\varphi(t)]\dot{\varphi}(t).$$

Використовуючи умову (11), знаходимо

$$\dot{x} = -D_1\sin\varphi(t) + D_2\cos\varphi(t). \tag{34}$$

Для визначення довільних сталих інтегрування D_1і D_2 задаємо початкові: умови. Нехай $x(0) = x_0$, а $\dot{x}(0) = v_0$. Тоді з виразів (33) та(34) отримаємо

$$f(x_0) = D_1'\cos\varphi(0) + D_2\sin\varphi(0),$$
$$v_0 = -D_1\sin\varphi(0) + D_2\cos\varphi(0).$$

Розв'язок цієї системи дає

$$D_1 = f(x_0)\cos\varphi(0) - v_0\sin\varphi(0),$$
$$D_2 = f(x_0)\sin\varphi(0) + v_0\cos\varphi(0).$$

Підставивши останні рівності у вираз (33), остаточно маємо:

$$f(x) = f(x_0)\cos\Phi(t) + v_0\sin\Phi(t), \tag{35}$$

де

$$\Phi(t) = \varphi(t) - \varphi(0). \tag{36}$$

Вводячи заміни $f(x_0) = N\cos\beta, v_0 = -N\sin\beta$, представимо розв'язок (35) в одночленній формі

$$f(x) = N\cos\lambda(t), \tag{37}$$

де

$$N = \sqrt{f^2(x_0) + v_0^2}; \lambda(t) = \Phi(t) + \beta$$

$$\beta = \mathrm{arctg}\frac{-v_0}{f(x_0)} \tag{38}$$

Формули (22), (28), (31), (35),(37) дозволяють будувати часові діаграми струмів та напруг на будьяких ділянках кола при відповідній апроксимації нелінійної залежності $V(x)$ чи $F(x)$ степеневими, експоненційними поліномами чи іншими функціями.

Висновки. У межах проведеного дослідження було розроблено та обґрунтовано аналітичний підхід до моделювання нелінійних електричних кіл силових випрямлячів, який базується на узагальненні методу фазових інтегралів шляхом перетворення змінних. Запропонована методика дозволяє здійснити лінеаризацію вихідної системи нелінійних диференціальних рівнянь та звести задачу до розв'язання лінійного рівняння другого порядку з відповідною фазовою та амплітудною функціями.

Перевагою цього підходу є можливість отримання точних аналітичних розв'язків, що відображають динаміку електричних процесів у як стаціонарних, так і перехідних режимах роботи кола. Особливу увагу приділено побудові амплітудно-частотних характеристик та їх залежності від параметрів кола, включаючи індуктивність, ємність, активні опори та зовнішню проти-ЕРС.

Детально проаналізовано структуру нелінійної електричної схеми випрямляча з фільтруючим конденсатором та активно-індуктивним навантаженням. Запропонований підхід дозволив описати поведінку системи з урахуванням її основних нелінійних властивостей, зокрема нелінійної вольт-амперної характеристики напівпровідникового елемента. Проведено повну математичну трансформацію вихідної системи рівнянь, здійснено її лінеаризацію у змінних, які дозволяють розглядати коливальні процеси з урахуванням демпфування та зовнішніх збурень.

У результаті отримано загальний вигляд розв'язків як у фазовій, так і в часовій області. Побудовані вирази дозволяють визначати стаціонарну амплітуду коливань, фазовий зсув, а також параметри, що впливають на резонансну частоту системи. Також сформульовано умови для визначення довільних сталих інтегрування у залежності від початкових умов задачі.

Результати дослідження свідчать про те, що метод перетворення змінних є ефективним інструментом для моделювання нелінійних електричних кіл, зокрема тих, що використовуються у силовій електроніці. Отримані аналітичні вирази можуть бути використані для точного моделювання, аналізу стабільності, оптимізації параметрів та проектування випрямлячів і суміжних перетворювальних пристроїв.

Таким чином, запропонована методика значно розширює інструментарій аналітичного моделювання та створює основу для подальшого розвитку комбінованих чисельно-аналітичних методів у дослідженні нелінійних електричних систем. Перспективним напрямом

подальших робіт є застосування розробленого підходу до багатофазних схем та елементів з нелінійними магнітними властивостями, а також автоматизація розрахунків за допомогою сучасного математичного програмного забезпечення.

Література

1. Теоретичні основи електротехніки. [у 3-х т.] : підруч. [для студ. техн. спец. вищ. закл. освіти]. Т. 2. Перехідні процеси у лінійних колах із зосередженим параметрами. Нелінійні та магнітні кола / Бойко В. С. [та ін.] ; заг. ред. І. М. Чиженко, В. С. Бойко. К. : НТУУ “КПІ”, 2008. – 224 с.
2. Карпов Ю. О., Ведміцький Ю. Г., Кухарчук В. В. Теоретичні основи електротехніки. Методи розрахунку нелінійних електричних і магнітних кіл в прикладах та задачах : навчальний посібник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2017. – 262 с.
3. Шидловська Н.А.,Кравченко О.П. Аналіз кола фотоелемент - нелінійне навантаження .//Технічна електродинаміка.-1998.-№2.- С.36-38.
4. Heading, J. (1962). An introduction to phase-integral methods. https://physicstoday.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.3051074.
5. Kotani, K., Hara, S., Sato, M., Nakao, H., & Yanagita, T. (2020). Nonlinear phase-amplitude reduction of delay-induced oscillations. *Physical Review Research, 2*(3), 033106. https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.2.033106
6. Moatimid, G.M., Amer, T.S. & Galal, A.A. Studying highly nonlinear oscillators using the non-perturbative methodology. Sci Rep 13, 20288 (2023). https://doi.org/10.1038/s41598-023-47519-5.

NUMERICAL MODELING OF NONLINEAR POWER RECTIFIER CIRCUITS USING THE METHOD OF VARIABLE TRANSFORMATION

Oleg Bondar, Viktor Kovalenko, Bohdan Kokovych, Oleksandr Kolyadenko, Oleksandr Veryovkin, Maxim Kasyanov

The article presents a numerical simulation of a specific topology of a power rectifier circuit with a load that includes components exhibiting nonlinear voltage-current characteristics. The analyzed scheme comprises reactive elements (inductors and capacitors), as well as semiconductor devices whose dynamic behavior is determined not only by control parameters but also by their internal electrophysical properties. To simplify the mathematical description of the nonlinear model, the method of variable transformation was applied. This approach enables the reduction of the governing differential equations to a form suitable for numerical integration with a controlled level of accuracy.

The analysis of the simulation results made it possible to identify the characteristic features of electromagnetic processes arising in the circuit under near-resonant and boundary operating conditions. The study determined the conditions under which stationary oscillations occur, accompanied by hysteresis, magnetic saturation, and oscillatory instability. Phase portraits and time-domain graphs were obtained, illustrating transitions from regular operation to self-oscillatory or chaotic modes, depending on the parameters of the circuit. A comparison of the results before and after the variable transformation demonstrated improved accuracy, enhanced numerical stability, and reduced computational effort.

The proposed approach has proven effective for analyzing complex nonlinear processes in power electronic circuits. It can be applied in the design of adaptive electric drive systems, in the modeling of energy conversion devices, and in the educational process for courses related to electrical engineering, electromechanics, and automation.

Keywords: numerical modeling, nonlinear electrical circuits, power rectifier.

References

1. Boiko, V. S., Chyzhenko, I. M. (Eds.). (2008). *Theoretical Foundations of Electrical Engineering. In 3 Volumes. Vol. 2: Transient Processes in Linear Lumped-Parameter Circuits. Nonlinear and Magnetic Circuits*. Kyiv: NTUU “KPI”. [in Ukrainian]
2. Karpov, Y. O., Vedmitsky, Y. G., & Kukharchuk, V. V. (2017). *Theoretical Foundations of Electrical Engineering: Methods for Analyzing Nonlinear Electrical and Magnetic Circuits in Examples and Problems*. Kherson: OLDI-PLUS. [in Ukrainian]
3. Shydlovska, N. A., & Kravchenko, O. P. (1998). Analysis of a Photovoltaic Cell Circuit – a Nonlinear Load. *Tekhnichna Elektrodynamika*, (2), 36–38. [in Ukrainian]
4. Heading, J. (1962). *An Introduction to Phase-Integral Methods*. Retrieved from: https://physicstoday.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.3051074
5. Kotani, K., Hara, S., Sato, M., Nakao, H., & Yanagita, T. (2020). Nonlinear phase-amplitude reduction of delay-induced oscillations. *Physical Review Research, 2*(3), 033106. Retrieved from: https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.2.033106
6. Moatimid, G. M., Amer, T. S., & Galal, A. A. (2023). Studying highly nonlinear oscillators using the non-perturbative methodology. *Scientific Reports, 13*, 20288. Retrieved from: https://doi.org/10.1038/s41598-023-47519-5