

УДК 514.18

ОДНОРОЗМІРНІ КОМПОЗИЦІЙНІ МАТРИЦІ ПАРАМЕТРИЧНІ

Верещага В.М., д-р. техн. наук,

vervik1949@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0038-8300

Адоньев Є.О., д-р. техн. наук,

evgen.adoniev@gmail.com, ORCID: 0000-0003-1279-4138

Муртазієв Е.Г., канд. пед. наук,

ernest_gaf@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2154-5523

Лисенко К.Ю., PhD

lyksyushka24@gmail.com, ORCID: 0000-0003-3047-6352

Верещага І.В.,

ivereshchaha@gmail.com*Мелітопольська школа прикладної геометрії імені Володимира Найдюша**Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (м. Запоріжжя, Україна)*

У статті запропоновано системний опис однорозмірних композиційних матриць параметричних, які слугують формальним інструментом параметризації просторових дискретно заданих кривих ліній та подальшого створення неперервних композиційних ліній. Показано, що кожному елементу однорозмірної точкової композиційної матриці відповідає унікальна характеристична функція, яка разом з іншими функціями утворює функціональний базис точкового полінома, що безперервно інтерполює вихідні базисні точки.

Наведено загальні записи композиційних матриць параметричних для трьох параметричних напрямів та їх універсальне умовне позначення, що забезпечує інваріантність до вибору системи координат і дозволяє розширювати підхід на композиційні поверхні. Запропоновано алгоритм побудови характеристичних функцій для кожної базисної точки дискретної кривої і продемонстровано його роботу на прикладі кривої з чотирма точками, включно з окремими випадками збігу точок.

Наведено приклад утворення характеристичних функцій для базисних точок дискретно поданої кривої, який пояснює правила параметризації точок ДПК і, безпосередньо, утворення характеристичних функцій. Вказується, що сукупність характеристичних функцій для усіх базисних точок дискретно поданої кривої являє собою функціональні бази з точкового поліному, який неперервно інтерполює вихідні базисні точки ДПК. Надається у загальному вигляді запис цього точкового поліному.

Наводиться варіанти окремих випадків розташування вихідних базисних точок, зокрема тих що збігаються одна з одною. Наголошується на тому, що наявність окремих випадків розташування базисних точок вихідної ДПК, не потребує застосування інших алгоритмів утворення

характеристичних функцій. Тобто і для одинарних, і для кратних точок характеристичні функції утворюються однаково.

Наголошується, що утворення сегментів композиційних поверхонь вимагає однакової кількості точок на ребрах за кожним із параметричних напрямів та обґрунтовується така необхідність.

Ключові слова. Композиційна лінія, композиційна поверхня, композиційна Матриця параметрична, характеристичні функції, точковий поліном, функціональний бази з точкового поліному.

Постановка проблеми. Для перетворення дискретно поданої кривої лінії у неперервну композиційну лінію та запису її у загальному вигляді необхідно створювати компоматриці параметричні. Виконання певних операцій над компоматрицями точковими і параметричними дозволить у загальному вигляді здійснювати записи і розв'язання метричних та позиційних задач за участі композиційних ліній. Виходячи із сказаного, розробка записів і позначень композиційних матриць параметричних у загальному вигляді є певною проблемою, розв'язання якої дозволить використовувати композиційноматричний підхід у розв'язанні задач композиційної геометрії.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Перші дослідження щодо створення композиційного геометричного моделювання проводились у роботі [1]. Подальший більш узагальнюючий підхід до композиційного геометричного моделювання було здійснено у роботі [2]. Утворенню неперервних композиційних кривих у вигляді точкових поліномів були присвячені дослідження у дисертаційній роботі [3]. У роботі [4] йшлося про утворення однорозмірних компоматриць точкових.

Формулювання цілей статті. Розробити умовні записи і позначення у загальному вигляді для компоматриць параметричних з метою утворення композиційних кривих ліній.

Основна частина. Якщо однорозмірні композиційні матриці точкові застосовуються для упорядкування однопараметричних геометричних об'єктів 4, то однорозмірні компоматриці параметричні, у скорочених умовних записах, подають результати параметризації вихідної дискретно поданої кривої дпк лінії. За результатами параметризації дпк для кожної точки, що входить до складу однорозмірної компоматриці точкової, утворюється своя характеристична функція. Виходячи з цього, місцезнаходження відповідних елементів по матриць точкових і параметричних є однаковим і крім того записуються у повній відповідності з розташуванням базисних точок на вихідній дискретно поданій кривій лінії.

Найзагальніші вигляди компоматриць параметричних за кожним із параметричних напрямів мають наступні записи:

$$\left. \begin{aligned} \llbracket A_{\Pi} \rrbracket_l &= \llbracket p_i(u) \rrbracket_{i=1,l}, \quad 0 \leq u \leq u_l; \\ \llbracket A_{\Pi} \rrbracket_m &= \llbracket q_j(v) \rrbracket_{j=1,m}, \quad 0 \leq v \leq v_m; \\ \llbracket A_{\Pi} \rrbracket_n &= \llbracket r_k(w) \rrbracket_{k=1,n}, \quad 0 \leq w \leq w_n, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

де l та i відповідають параметричному напрямку u , m та j – параметричному напрямку v , n та k – параметричному напрямку w , u_l , v_m , w_n – значення параметрів у крайніх точках.

У більш загальному випадку, тобто без посилань на параметричні напрями, ком по матриці параметричні один можуть позначатися наступним чином:

$$\llbracket A_{\Pi} \rrbracket = \llbracket a_i(t) \rrbracket, \quad i = \overline{1, l}; \quad 0 \leq t \leq t_l. \quad (2)$$

У (1) і (2) записи $p_i(u)$, $q_j(v)$, $r_k(w)$, $a_i(t)$ позначають у загальному вигляді характеристичні функції, які являють собою інваріанти паралельного проєктування. При цьому, навіть для порожніх елементів компоматриць точкових створюються характеристичні функції.

Надамо приклад утворення характеристичних функцій для базисних точок і створення функціонального базису для точкового поліному, який інтерполіує ці базисні точки.

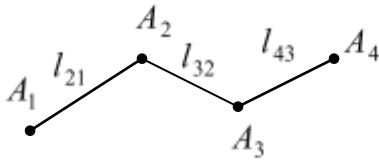


Рис. 1. Просторова супровідна ламана лінія A_1A_4

Нехай просторова дискретна крива визначається чотирма базисними точками A_i , $i = \overline{1, 4}$ (рис. 1).

На рис. 1 позначення l_{11} , l_{21} , l_{32} , l_{43} – довжини, відповідно, відтинків A_1A_1 , A_1A_2 , A_2A_3 та A_3A_4 .

Визначимо довжину супровідної ламаної лінії $A_1A_4 = l_{11} + l_{21} + l_{32} + l_{43}$.

Визначимо параметри параметри t_i , $i = \overline{1, 4}$:

$$t_1 = \frac{l_{11}}{l_{41}} = 0, \quad t_2 = \frac{l_{21}}{l_{41}}, \quad t_3 = \frac{l_{21}+l_{32}}{l_{41}}, \quad t_4 = \frac{l_{21}+l_{32}+l_{43}}{l_{41}} = 1. \quad (3)$$

Визначимо характеристичні функції $a_i(t)$, $i = \overline{1, 4}$:

$$\left. \begin{aligned} \text{Точка } A_1: a_1(t) &= \frac{(t_2-t)(t_3-t)(t_4-t)}{(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_4-t_1)}, \\ \text{Точка } A_2: a_2(t) &= \frac{(t_1-t)(t_3-t)(t_4-t)}{(t_1-t_2)(t_3-t_2)(t_4-t_2)}, \\ \text{Точка } A_3: a_3(t) &= \frac{(t_1-t)(t_2-t)(t_4-t)}{(t_1-t_3)(t_2-t_3)(t_4-t_3)}, \\ \text{Точка } A_4: a_4(t) &= \frac{(t_1-t)(t_2-t)(t_3-t)}{(t_1-t_4)(t_2-t_4)(t_3-t_4)}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Сукупність характеристичних функцій (4) являє собою функціональні бази з точкового поліному:

$$L(t) = \sum_{i=1}^l A_i \cdot a_i(t), \quad l = 4, 0 \leq t \leq 1 \quad (5)$$

Цей приклад (рис. 1) є найбільш загальним. Наведемо окремі випадки збігу точок для яких змінюється значення параметрів t_2, t_3 та значення характеристичних функцій $a_i(t)$, $i = \overline{1, 4}$; а записи характеристичних функцій (4) та точкового поліному (5) лишаються незмінними.

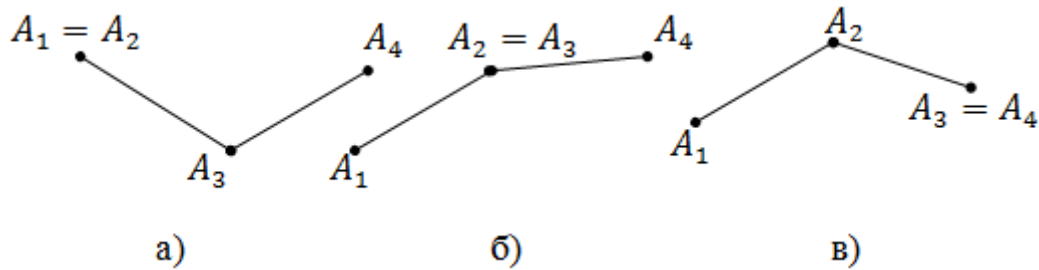


Рис. 2. Варіанти збігу двох точок супровідної ламаної лінії.

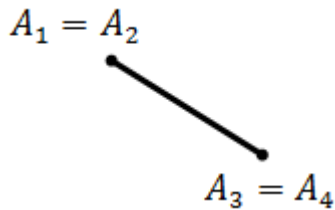


Рис. 3. Варіанти подвійного збігу двох точок.

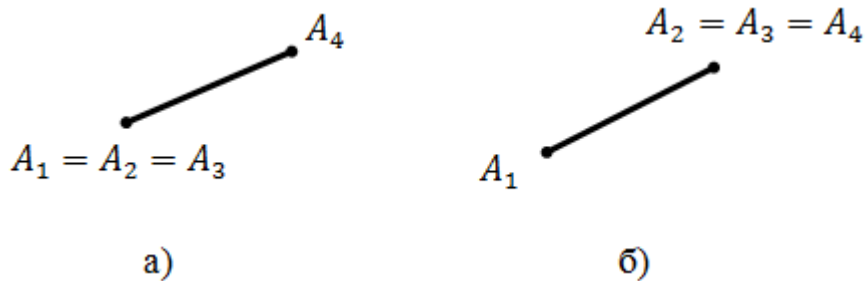


Рис. 4. Варіанти потрійного збігу двох точок.

Всі наведені варіанти (рис. 2, рис. 3, рис. 4) реалізується за використання характеристичних функцій (4) та точкового поліному (5). І навіть більше того, функціональний базис точкового поліному (5) забезпечує інтерполяцію чотирьох точок, коли вони збіглися в одну точку (рис. 6).

$$\circ$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4$$

Рис. 6. Варіант збігу чотирьох точок.

Можливість такої інтерполяції точковими поліномами, коли збігаються в одну, всі базисні точки, що визначають цей точковий поліном, є важливою для композиційної інтерполяції складних геометричних об'єктів.

Виникає питання – для чого це потрібно?

Річ у тім, коли сегменти реальних поверхонь подаються дискретно ребрами сіток, то на цих ребрах може міститися різна кількість базисних точок.

А утворення сегментів композиційних поверхонь вимагає однакової кількості точок на усіх ребрах за одним параметричним напрямом. Для дотримання цієї умови у компоматрицях точкових замість відсутніх елементів вводяться порожні елементи, які доєднуються до найближчих існуючих, що відповідають наявним точкам на ребрах сегменту реальної поверхні.

При цьому, характеристичні функції утворюються як для дійсних так і порожніх елементів. Тобто компоматриці параметричні в усіх рядках містять однакову кількість характеристичних функцій і в усіх стовпцях іншу, ніж у рядках, кількість елементів але також однаково.

Висновки. Наведено загальні способи позначення компоматриць параметричних та надано приклад їхнього утворення для просторової дискретно поданої лінії з усіма наявними точками. Надано пояснення щодо утворення компоматриць параметричних для дискретно поданих ліній з порожніми точками. У цьому полягає відмінність композиційної поверхні від реальної.

Література

1. Верещага В.М. Композиційне геометричне моделювання: монографія. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2017, 108с.
2. Адоньєв Є.О. Композиційний метод геометричного моделювання багатофакторних систем: дис. ... д-ра техн. наук. К.: КНУБА, 2018, 512 с.
3. Лисенко К.Ю. Теоретичні основи методів утворення композиційних ліній і поверхонь: дис...к.т.н. Київ. КНУБА, 2022. 267с.
4. Верещага В.М., Адоньєв Є.О., Муртазієв Е.Г., Лисенко К.Ю., Верещага І.В., Кривенко О.В. Однорозмірні композиційні матриці точкові. *Сучасні проблеми моделювання. Запоріжжя: МДПУ*, 2025. Вип. 27. С.47-52.

ONE-DIMENSIONAL PARAMETRIC COMPOSITION MATRICES

Viktor Vereshchaha, Yevhen Adoniev, Ernest Murtaziiev, Kseniia Lysenko,
Ivan Vereshchaha

The article proposes a systematic description of one-dimensional parametric composition matrices, which serve as a formal tool for parameterising spatial discretely defined curves and subsequently constructing continuous composition lines. It is shown that each element of a one-dimensional point composition matrix corresponds to a unique characteristic

function, which, together with other functions, forms the functional basis of a point polynomial that continuously interpolates the initial base points.

General forms of parametric composition matrices for three parametric directions are presented, along with a universal symbolic notation that ensures invariance with respect to the choice of coordinate system and enables extension of the approach to composition surfaces. An algorithm is proposed for constructing characteristic functions for each base point of a discretely defined curve, and its operation is demonstrated on an example of a curve with four points, including special cases of point coincidence.

An example is given of the formation of characteristic functions for the base points of a discretely defined curve, illustrating the rules of DDC (Discretely Defined Curve) point parameterisation and, directly, the generation of characteristic functions. It is stated that the set of characteristic functions for all base points of the DDC constitutes a functional basis of a point polynomial that continuously interpolates the initial base points. A general expression for this point polynomial is provided.

Variants of specific configurations of the initial base points are discussed, including those where points coincide. It is emphasised that the presence of such configurations does not require alternative algorithms for constructing characteristic functions. That is, characteristic functions are generated according to a unified method for both single and multiple points.

Furthermore, it is underlined that the formation of segments of composition surfaces requires the same number of points along each parametric edge, and this requirement is substantiated.

Keywords. Composite line, composite surface, composite parametric matrix, characteristic functions, point polynomial, functional basis from a point polynomial.

References

1. Vereshchaha V.M. (2017) Compositional geometric modeling: Monohafiiia. Melitopol: FOP Odnoroh T.V., 108p. [in Ukrainian].
2. Adoniev Ye.O. (2018) Compositional method of geometric modeling of multifactor systems: doctor's thesis. K.: KNUBA [in Ukrainian].
3. Lysenko K.Iu. (2022) Theoretical foundations of methods for creating compositional lines and surfaces: candidate's thesis. Kyiv. KNUBA. [in Ukrainian].
4. Vereshchaha V.M., Adoniev Ye.O., Murtaziiev E.H., Lysenko K.Iu., Vereshchaha I.V., Kryvenko O.V. (2025) One-dimensional composite dot matrices. *Suchasni problemy modeliuivannia*. Vyp. 27. 47-52.[in Ukrainian].