УДК 514.18, 623.54

ДОСЛІДЖЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ КРИВИХ ПРИ ГЕОМЕТРИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ОБВОДІВ СНАРЯДІВ

Котляр Д.В. канд. техн. наук,
yardnight@gmail.com, ORCID: 0000-0003-1718-753X
Козловський А.В. канд. техн. наук,
artem.kozlovskiy@nuos.edu.ua, ORCID: 0000-0002-7604-6115
Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова (м. Миколаїв, Україна)
Фоменко В.Г., канд. фіз.-мат. наук,
fomenko.vladymyr@gmail.com, ORCID: 0000-0002-0558-4688
Таблер Т.І.
Tabler_Tetyana@mspu.edu.ua, ORCID: 0000-0002-5489-3874
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (м. Запоріжжя, Україна)

У статті представлено дослідження доцільності застосування дев'яти аналітичних кривих для геометричного моделювання носової частини балістичного снаряда з метою забезпечення високої аеродинамічної ефективності. Дослідження зосереджено на апроксимації огівального профілю (обтічний профіль носової частини), враховуючи фізичні вимоги, такі як початкова точка, кінцева висота, горизонтальна дотична та монотонність. Використовувалися криві різної природи: поліноміальні (поліном 3-го степеня, парабола), сигмоїдальні (логістична, гіперболічний тангенс) та нелінійні (еліптична дуга, степенева, логарифмічна, експоненціальна, крива Носека), що дозволило оцінити їхню здатність точно відтворювати профіль і відповідати аеродинамічним вимогам.

Методологія дослідження базується на числовій оптимізації з використанням семи методів: Nelder-Mead, Powell, CG, BFGS, L-BFGS-B, TNC та SLSQP. Для забезпечення фізичних обмежень застосовувалися штрафні функції та прямі обмеження (для SLSQP), що контролювали відповідність граничним умовам і монотонність. Штрафні функції враховували відхилення від заданих граничних точок, кут нахилу дотичної та невід'ємність похідної в ключових точках профілю. Оптимізація проводилася з урахуванням середньоквадратичної помилки (RMSE) між реперними точками профілю та модельними кривими. Для оцінки якості апроксимації аналізувалися відхилення в передній, середній і задній зонах профілю, а також аеродинамічна ефективність, що залежить від плавності профілю та відповідності горизонтальній дотичній.

Дослідження включало порівняння кривих за точністю підгонки, стійкістю до числових помилок і здатністю зберігати фізичну коректність. Особлива увага приділялася впливу штрафних функцій на збіжність методів оптимізації та їхній здатності компенсувати обмеження методів без прямих обмежень. Проведено аналіз аеродинамічних характеристик, оцінюючи вплив відхилень профілю на опір і стабільність снаряда. Результати дозволяють сформулювати рекомендації щодо вибору оптимальних кривих і методів оптимізації для геометричного моделювання аеродинамічних форм.

Дослідження підкреслює важливість комплексного підходу до моделювання, поєднуючи аналітичні криві, числову оптимізацію та фізичні обмеження для досягнення високої точності та аеродинамічної ефективності. Отримані висновки можуть бути використані для вдосконалення конструкцій балістичних снарядів, а також у суміжних галузях, де потрібне точне геометричне моделювання складних профілів.

Ключові слова: геометричне моделювання, балістичний снаряд, аналітичні криві, аеродинамічна ефективність, числова оптимізація, штрафні функції, поліноміальні криві, сигмоїдальні криві, нелінійні криві.

Постановка проблеми. Геометричне моделювання обводів балістичних снарядів є ключовим етапом у розробці високоефективних боєприпасів. Носова частина снаряда значною мірою визначає його аеродинамічні характеристики, такі як опір повітря, стійкість польоту та балістична ефективність[2]. Для точного відтворення профілю носової частини використовуються аналітичні криві, які дозволяють описати геометрію за допомогою математичних рівнянь, придатних для числових розрахунків та автоматизованого проєктування. Однак вибір відповідної кривої ускладнений необхідністю відповідності фізичним вимогам: нульова висота на початку профілю $y(0)=0$, відповідність калібру в кінцевій точці $y(x_{\max})=caliber/2$, горизонтальна дотична для плавного переходу до циліндричної частини $dy/dx\approx 0$ при $x=x_{\max}$ та монотонне зростання профілю $dy/dx\geq 0$.

Сучасні дослідження геометричного моделювання обводів снарядів часто зосереджуються на окремих типах кривих без систематичного порівняння їхньої ефективності з урахуванням усіх фізичних вимог[7]. Наприклад, у роботах, присвячених сплайнам, рідко аналізується їхня обчислювальна складність чи придатність для аналітичних розрахунків. Дослідження поліноміальних моделей зазвичай ігнорують вплив обмежень на горизонтальну дотичну, що знижує точність у кінцевих точках[8]. Аналіз нелінійних кривих, таких як логістична чи гіперболічна, часто обмежується теоретичними аспектами без оцінки їхньої практичної застосовності в балістиці. Крім того, більшість досліджень не враховують можливості керування кривиною профілю для оптимізації аеродинамічної ефективності, що є ключовим для сучасних високоточних снарядів [1]. Відсутність комплексного порівняння різних кривих і методів оптимізації залишає прогалину в розумінні їхньої доцільності для конкретних профілів.

Обґрунтування доцільності дослідження. Проведення порівняльного аналізу аналітичних кривих для моделювання носової частини снаряда є актуальним завданням, оскільки воно дозволяє визначити оптимальну модель, яка поєднує високу точність, відповідність фізичним вимогам і можливість керування кривиною. Керування кривиною профілю є критично важливим для забезпечення монотонного зростання, що запобігає турбулентності повітряного потоку, а також для досягнення пологості в кінцевій точці, що сприяє аеродинамічній ефективності шляхом зменшення опору [1].

Аналітичні криві, такі як поліноми, логістичні чи гіперболічні функції, дозволяють точно налаштувати форму профілю через оптимізацію параметрів, що забезпечує баланс між геометричною точністю та фізичними характеристиками. Дослідження дев’яти типів кривих (еліптична дуга, парабола, поліном третього степеня, степенева, логарифмічна, експоненціальна, логістична, крива Носека, гіперболічний тангенс) із застосуванням різних методів оптимізації (Nelder-Mead, Powell, CG, BFGS, L-BFGS-B, TNC, SLSQP) дає змогу систематично оцінити їхню здатність відтворювати профіль із заданими вимогами. Такий підхід обґрунтований потребою в точних і ефективних геометричних моделях для балістичного проєктування, де аеродинамічна ефективність і стабільність польоту є визначальними.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Геометричне моделювання носової частини балістичних снарядів залишається активною областю досліджень через потребу в точних аналітичних моделях, які забезпечують аеродинамічну ефективність і стабільність польоту. Достатньо публікацій зосереджуються на застосуванні аналітичних кривих для апроксимації профілів, методах оптимізації параметрів і врахуванні фізичних вимог. Однак ці дослідження мають прогалини, які обмежують їхню здатність пропонувати універсальні моделі, що поєднують точність, фізичну коректність і можливість керування кривиною.

Серед сучасних підходів значну увагу приділено поліноміальним моделям вищих порядків і нелінійним кривим, таким як логістичні та гіперболічні функції, для моделювання огівального профілю (мається на увазі обтічний профіль носової частини балістичного снаряду). Наприклад, у [9] досліджено використання поліномів четвертого степеня для моделювання носових частин, що забезпечують високу точність апроксимації, але потребують складних методів оптимізації, таких як генетичні алгоритми, що підвищує обчислювальну складність. Логістичні криві, проаналізовані в [6], ефективно відтворюють плавні профілі, але їхня здатність забезпечувати горизонтальну дотичну обмежена без додаткових штрафних функцій. Гіперболічний тангенс, розглянутий у [5], показує потенціал для моделювання монотонних профілів, але чутливість до початкових параметрів ускладнює збіжність під час оптимізації. Ці дослідження підкреслюють важливість вибору відповідного методу оптимізації для досягнення балансу між точністю та фізичними вимогами.

Більшість сучасних робіт зосереджені на окремих типах кривих або методах оптимізації без комплексного аналізу їхньої придатності для балістичного моделювання [4, 9]. Дослідження рідко враховують комбінацію фізичних вимог (монотонність, горизонтальна дотична, крайні точки) і не пропонують рекомендацій щодо вибору оптимальних моделей для профілів із заданими параметрами. Крім того, бракує аналізу впливу штрафних функцій на точність і стабільність оптимізації для нелінійних кривих, що обмежує практичну застосовність результатів [10].

Методи оптимізації, такі як градієнтні (BFGS, CG) і безградієнтні (Nelder-Mead, Powell), активно застосовуються для налаштування параметрів кривих. У [4] використано метод SLSQP для поліноміальних моделей, що дозволяє задавати прямі обмеження на крайні точки, але автори зазначають проблеми зі збіжністю для нелінійних кривих. У [10] досліджено застосування штрафних функцій у методі Nelder-Mead для забезпечення монотонності, але нестабільність при великих вагових коефіцієнтах знижує ефективність. Ці роботи вказують на необхідність систематичного порівняння методів оптимізації для різних типів кривих, що рідко виконується в літературі.

Незважаючи на значний прогрес, залишається потреба в систематичному порівнянні аналітичних кривих для конкретних профілів снарядів з урахуванням усіх фізичних вимог та методів оптимізації. Це дослідження заповнює цю прогалину, аналізуючи дев’ять кривих для моделювання носової частини снаряда.

Формулювання цілей статті. Метою даного дослідження є аналіз доцільності застосування дев’яти аналітичних кривих для моделювання носової частини снаряда, оцінка їхньої точності (за RMSE), відповідності фізичним вимогам та визначення оптимальних методів оптимізації. Результати спрямовані на створення рекомендацій для вибору кривих у балістичному проєктуванні.

Основна частина. Дослідження базується на наборі реперних точок, що описують огівальний профіль носової частини балістичного снаряда (довжина x_{max}=26.509 мм, калібр 8.58 мм, $y_{max}(x_{max})$=3.67 мм, радіус скруглення 0.62 мм). Аналізовано дев'ять аналітичних кривих: еліптична дуга, парабола, поліном третього степеня, степенева, логарифмічна, експоненціальна, логістична, крива Носека та гіперболічний тангенс. Для кожної кривої виконано оптимізацію параметрів за допомогою семи методів мінімізації: Nelder-Mead, Powell, CG, BFGS, L-BFGS-B, TNC та SLSQP, реалізованих у бібліотеці SciPy (Python). Методи вибрано через їхню різну здатність обробляти обмеження та чутливість до нелінійних функцій [10].

Оптимізація полягала в мінімізації середньоквадратичної похибки (MSE) між значеннями кривої та реперними точками. Для оцінки точності використано корінь із MSE (RMSE), що визначається (1) [3], а також відхилення в крайніх точках ($\Delta y(x_{\min})=y(x_{\min}) - 0$, $\Delta y(c)=y(x_{\max}) - 3.67$). Фізичні вимоги до профілю включали: $y(0)=0$, $y(26.509)=3.67$ мм, горизонтальну дотичну ($dy/dx \approx 0$ при $x_{\max}$) та монотонне зростання ($dy/dx \geq 0$) на всій ділянці профілю.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{y}_i - \mathrm{y}_i^m)^2}\,, \tag{1}$$

де y_i – значення реперної точки, $y_i^{\,m}$ – передбачене значення точки кривої, n – кількість точок [3]. RMSE є стандартною метрикою для задач регресії та апроксимації, оскільки вона чутлива до великих відхилень і дозволяє кількісно порівнювати моделі за їхньою точністю [3]. У контексті моделювання носової частини снаряда RMSE дає змогу оцінити, наскільки кожна крива (еліптична дуга, парабола тощо) відповідає заданому профілю, враховуючи фізичні вимоги

Для методів, що не підтримують обмеження (Nelder-Mead, Powell, CG, BFGS, L-BFGS-B, TNC), використано штрафні функції, які додають до цільової функції (MSE) доданки, пропорційні порушенням фізичних вимог. Загальна форма цільової функції з штрафами має вигляд:

$$L(\theta) = MSE(\theta) + \sum_i w_i P_i(\theta)\,, \tag{2}$$

де θ — вектор параметрів кривої, $P_i(\theta)$ — штраф за порушення (i)-ї умови, w_i — ваговий коефіцієнт (зазвичай $10^2 \ldots 10^4$). Штрафи вводилися за чотирма граничними умовами:

1) $P_1=(\mathrm{y}(0))^2$ для $y(0)=0$;

2) $P_2=(y(x_{\max})-3.67)^2$ для $y(x_{\max})=3.67$;

3) $P_3 = (\frac{dy}{dx}(x_{\max}))^2$ для горизонтальної дотичної;

4) $P_4 = \sum_{i=1}^{n} \min(0, \frac{dy}{dx}(x_i))^2$ для монотонності, де похідна перевірялася в точках рівномірно розподілених на інтервалі $x_i[0..\, x_{\max}]$.

Теоретична основа штрафних функцій ґрунтується на методі бар'єрів і штрафів, описаному в [10]. Згідно з [10], додавання штрафних доданків трансформує задачу з обмеженнями в задачу без обмежень, що дозволяє використовувати методи, такі як Nelder-Mead чи BFGS, які не підтримують обмеження. Високі значення w_i забезпечують пріоритет виконання умов, але можуть призводити до числової нестабільності, якщо обрано неправильно [4]. У дослідженні ваги штрафів налаштовувалися емпірично, щоб збалансувати точність (RMSE) і відповідність фізичним вимогам. Діапазон вагів штрафів приймався $w[10^2..10^4]$.

Метод SLSQP, на відміну від інших, використовував обмеження безпосередньо через нерівності, наприклад, $|y(0)|\leq 10^{-3}$, $|y(x_{max})-3.67|\leq 10^{-3}$, $dy/dx\geq 0$. Це дозволило уникнути штрафів, але вимагало ретельного вибору початкових значень параметрів для збіжності [4]. Початкові значення параметрів для всіх методів базувалися на попередніх регресіях.

У роботі, в контексті моделювання огівального профілю носової частини балістичного снаряда, використовуються терміни оцінювання точності: переоцінена та недооцінена, що описують відхилення апроксимуючої кривої від реперних точок профілю, тобто від заданої геометричної форми.

Переоцінена: Крива розташована вище реперних точок у певній зоні профілю. Це означає, що значення y_i (висота профілю) для відповідних x_i (відстань уздовж осі абсцис) на кривій більше, ніж у реперних точках. Переоцінка може призводити до крутішого або ширшого профілю, що негативно впливає на аеродинамічні характеристики, наприклад, збільшує опір повітря.

Недооцінена: Крива розташована нижче реперних точок у певній зоні. Значення y_i на кривій менше, ніж у реперних точках з відповідними x_i. Недооцінка може створювати вужчий або менш пологий профіль, що також може погіршувати аеродинамічні властивості, наприклад, знижувати стабільність снаряда.

На рис. 1–9 представлено результати оптимізації дев'яти аналітичних кривих для профілю носової частини снаряда. Чорні крапки позначають реперні точки огівального профілю, а кольорові лінії відповідають методам оптимізації (Nelder-Mead, Powell, CG, BFGS, L-BFGS-B, TNC, SLSQP) із зазначенням RMSE у легенді рисунка.

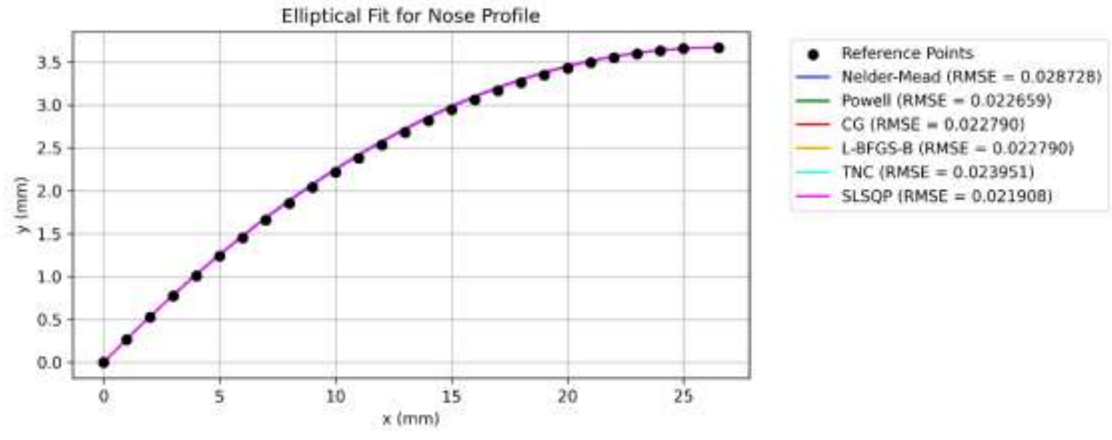

Рис. 1. Порівняння оптимізованих еліптичних дуг для профілю носової частини снаряда

Еліптична дуга: $\boldsymbol{y = y_c + b\sqrt{1 - \frac{(x-x_c)^2}{a^2}}}$. Графік еліптичної дуги рис.1 показує криві, що слідують реперним точкам, але з переоціненням у середній зоні та незначними відхиленнями на границях. SLSQP (RMSE = 0.021908) перевершує Powell, CG, L-BFGS-B (RMSE ≈0.022–0.023) і Nelder-Mead (RMSE = 0.028728). Великі значення коефіцієнтів ускладнюють точну підгонку. Найкращий метод: SLSQP (RMSE = 0.021908), що забезпечує $|\Delta y(0)|=0.001$, $|\Delta y(26.509)|=0.001$– висока точність, $\frac{dy}{dx}(x_{\max})=0.00001$ (кут нахилу 0.00°) – ідеальна горизонтальна дотична (тобто похідна ≈ 0 при $x_{\max}$).

Монотонність: Забезпечується штрафами за $dy/dx \geq 0$ у кількох точках і обмеженнями SLSQP. Еліптична форма природно підтримує монотонність у межах профілю.

Аеродинамічна ефективність: Еліптична дуга забезпечує плавний профіль, але переоцінення в середній зоні (≈0.15–0.18 мм) може підвищувати опір. Горизонтальна дотична оптимізує задню зону, сприяючи стабільності.

Відповідність огівальному профілю: Еліптична дуга відтворює профіль із помірною точністю, але переоцінює середню зону і має відхилення на x=0. Крива поступається поліноміальним кривим.

Парабола: $\boldsymbol{y=a \cdot x^2+b \cdot x+c}$**.** Параболічні криві на графіку рис. 2 плавно слідують реперним точкам, але з помітним переоціненням у передній і середній зонах. Метод SLSQP (RMSE = 0.012163) забезпечує кращу точність порівняно з Nelder-Mead, Powell, L-BFGS-B і TNC, які мають RMSE ≈0.015–0.016. Простота параболи обмежує її гнучкість, але вона залишається ефективною. Найкращий метод: SLSQP (RMSE = 0.012163) , що забезпечує $|\Delta y(0)|=0.000$, $|\Delta y(26.509)| \approx 0.000$— висока точність, $\frac{dy}{dx}(x_{\max})$ =0.001 (кут нахилу 0.06°) – близьке до горизонтальної дотичної.

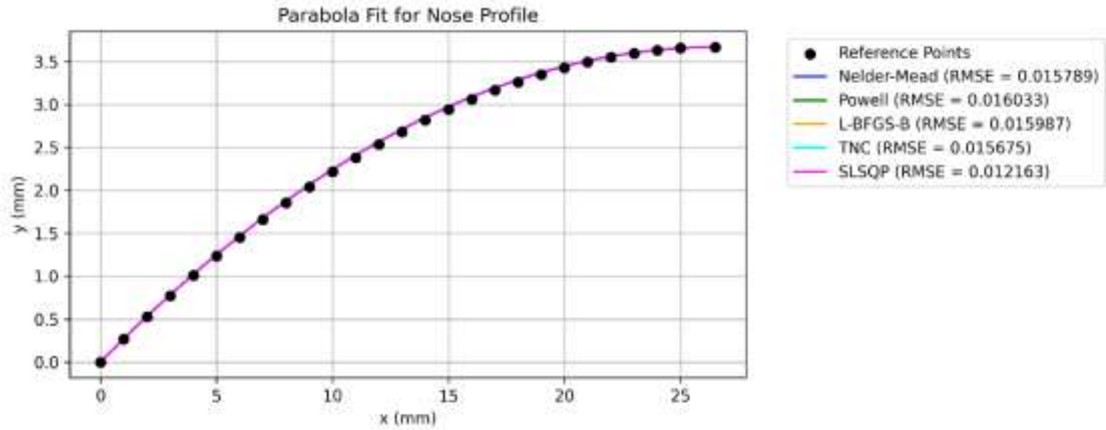

Рис. 2. Порівняння оптимізованих парабол для профілю носової частини снаряда

Монотонність: Забезпечується штрафами за $dy/dx \geq 0$, включеними в оптимізацію. Квадратична форма параболи природно підтримує монотонне зростання в межах профілю. Також монотонність гарантується параметрами ($b>0$, $a<0$), і всі криві плавно зростають.

Аеродинамічна ефективність: Парабола створює гладкий профіль із низьким опором, але переоцінення в передній зоні (~0.2 мм) може викликати незначну турбулентність. Горизонтальна дотична оптимізує задню зону.

Відповідність огівальному профілю: Парабола добре відтворює профіль, але переоцінює передню і середню зони (~0.15–0.2 мм). Вона поступається поліному за точністю, але є простішою альтернативою.

Крива поліному 3-го степеня: $\boldsymbol{y=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d}$. Графік полінома 3-го степеня рис. 3 демонструє плавні криві, що тісно прилягають до реперних точок у всіх зонах профілю (передній, середній, задній). Висока гнучкість полінома забезпечує мінімальні відхилення, особливо для методу SLSQP, який має найнижче RMSE, що вказує на виняткову точність. Криві інших методів (Nelder-Mead, L-BFGS-B) злегка відхиляються в середній зоні, але SLSQP забезпечує найкращу відповідність. Найкращий метод: SLSQP (RMSE = 0.002652), що забезпечує $|\Delta y(0)|=0.001$, $|\Delta y(26.509)| \approx 0.001$– висока точність, $\frac{dy}{dx}(x_{\max})=0.004702$ (кут нахилу 0.27°) – близьке до горизонтальної дотичної.

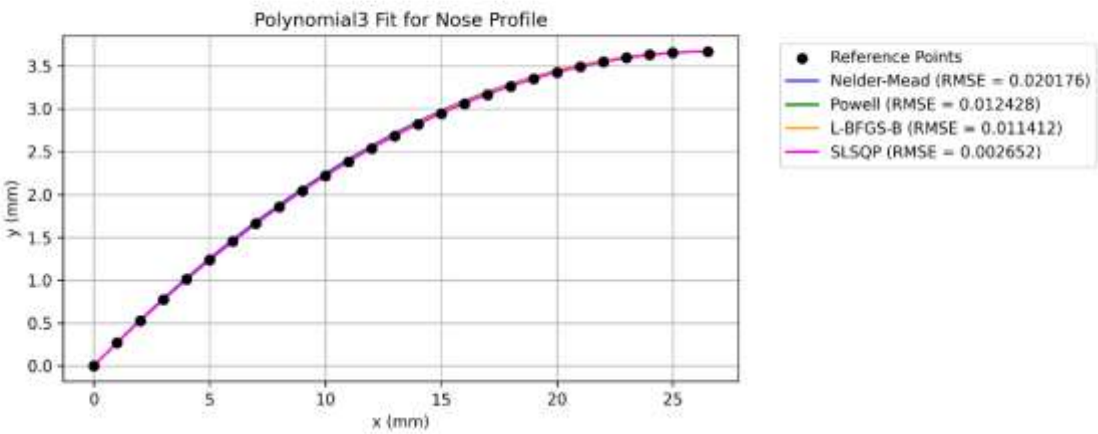

Рис. 3. Порівняння оптимізованих поліномів третього степеня для профілю носової частини снаряда

Монотонність: Досягається завдяки штрафам за невід'ємність похідної ($dy/dx \geq 0$) у кількох точках профілю, що включено до цільової функції для всіх методів. Поліном природно підтримує монотонність через свою кубічну форму.

Аеродинамічна ефективність: Поліном забезпечує плавний профіль із мінімальними відхиленнями, що сприяє низькому аеродинамічному опору.

Горизонтальна дотична в задній зоні оптимізує обтікання, а точність у передній і середній зонах зменшує турбулентність.

Відповідність огівальному профілю: Поліном найкраще відтворює огівальний профіль, із мінімальним переоціненням у середній зоні (~0.12–0.15 мм) і точною відповідністю в задній зоні. Це робить його ідеальним для високоточних аеродинамічних застосувань.

Степенева крива: $\boldsymbol{y=a\cdot x^b+c}$. Степеневі криві на графіку рис. 4 показують нелінійну форму з переоціненням у передній зоні та недооціненням у задній. SLSQP (RMSE = 0.224342) перевершує Nelder-

Mead і L-BFGS-B (RMSE ≈ 0.544). Нелінійна форма ускладнює точну підгонку. Найкращий метод: SLSQP (RMSE = 0.224342), що забезпечує $|\Delta y(0)|=2.9\cdot 10^{-4}$, $|\Delta y(26.509)|=0.001$– висока точність, але $\frac{dy}{dx}(x_{\max})\approx 0.076605$ (кут нахилу 4.38°) – значне відхилення від горизонтальної дотичної.

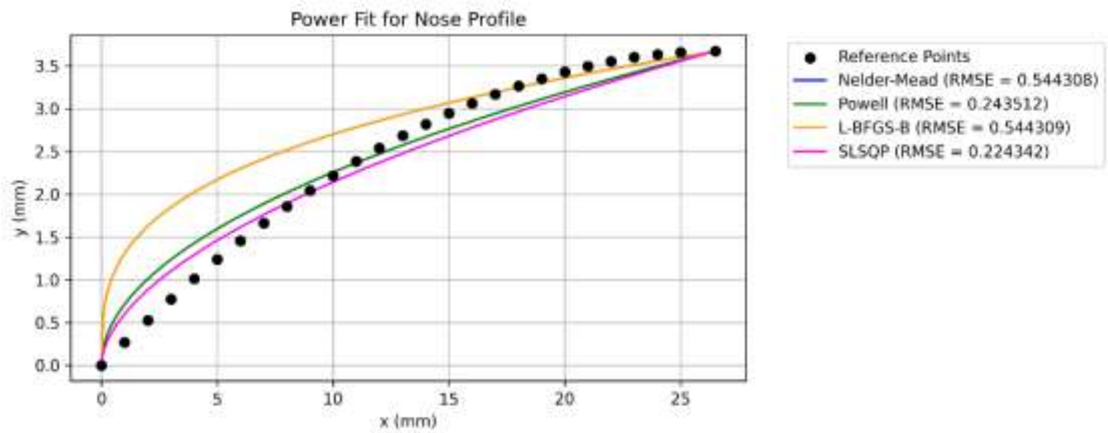

Рис. 4. Порівняння оптимізованих степеневих кривих для профілю носової частини снаряда

Монотонність: Виконана завдяки $a,b>0$, але не завжди досягається через високу похідну в задній зоні. Штрафи за $dy/dx\geq 0$ частково коригують це, але не повністю.

Аеродинамічна ефективність: Переоцінення в передній зоні (0.8 мм) і недооцінення в задній (0.23 мм) підвищують опір. Високий кут нахилу погіршує обтікання.

Відповідність огівальному профілю: Степенева крива погано відтворює профіль через значні відхилення і порушення горизонтальної дотичної.

Логарифмічна крива: $\boldsymbol{y=a\ln(x+b)+c}$. Логарифмічні криві на графіку рис. 5 мають нелінійну форму з значним переоціненням у передній і середній зонах. SLSQP (RMSE = 0.646854) менш точний, ніж Powell (RMSE = 0.173440), але краще відповідає граничним умовам. Логарифмічна форма погано підходить для огівального профілю. Найкращий метод: SLSQP (RMSE = 0.646854), що забезпечує $|\Delta y(0)|=0.001$, $|\Delta y(26.509)|=0.001$мм–

висока точність, $\frac{dy}{dx}(x_{\max})=0.03$ (кут нахилу 1.27°) – відхилення від горизонтальної дотичної.

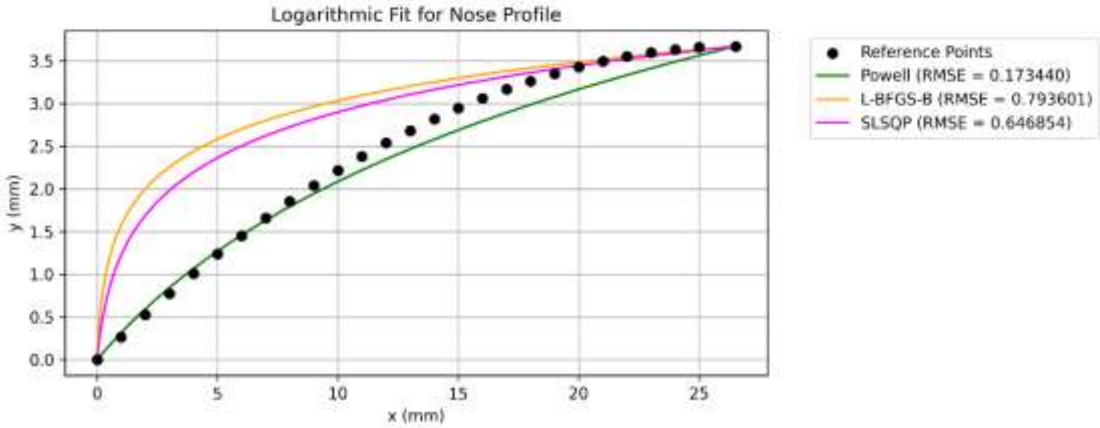

Рис. 5. Порівняння оптимізованих логарифмічних кривих для профілю носової частини снаряда

Монотонність: Забезпечується штрафами за $dy/dx \geq 0$. Логарифмічна форма підтримує монотонність, оскільки $a \cdot b > 0$, а $b \cdot x + c > 0$ для $x \geq 0$.

Аеродинамічна ефективність: Значне переоцінення в передній (1.7 мм) і середній (0.65–0.95 мм) зонах підвищує опір. Похідна в задній зоні погіршує обтікання.

Відповідність огівальному профілю: Логарифмічна крива має значні відхилення, що робить її непридатною для точної апроксимації.

Експоненціальна крива: $\boldsymbol{y=a(1-e^{-b \cdot x})+c}$**.** Експоненціальні криві на графіку рис. 6 показують нелінійну форму з переоціненням у всіх зонах. Nelder-Mead (RMSE = 0.468888) злегка перевершує SLSQP (RMSE = 0.485474), CG, L-BFGS-B, TNC. Експоненціальна форма погано відповідає профілю.

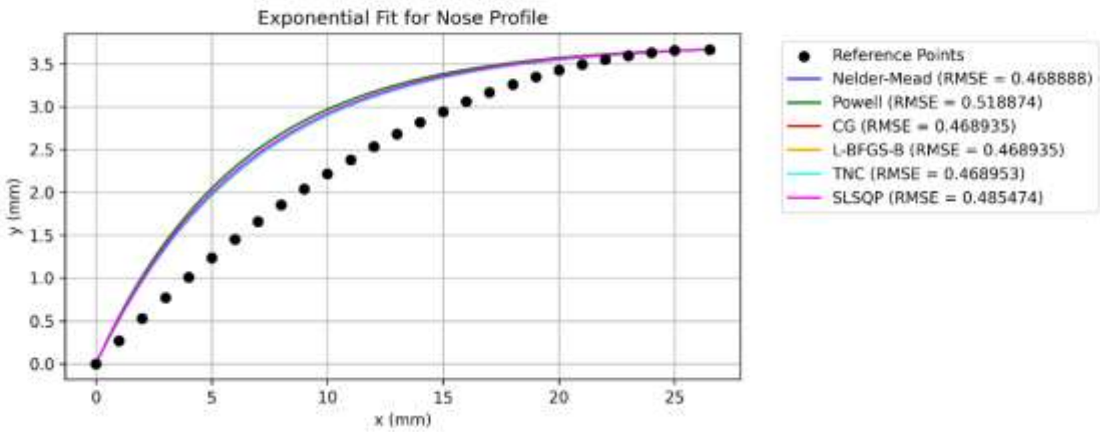

Рис. 6. Порівняння оптимізованих експоненціальних кривих для профілю носової частини снаряда

Найкращий метод: Nelder-Mead (RMSE = 0.468888), що забезпечує $|\Delta y(0)|$=0, |Δy(26.509)|=0,000298мм – висока точність, $\frac{dy}{dx}(x_{\max})$=0.0107 (кут нахилу 0.61°) – відхилення близьке до горизонтальної дотичної.

Монотонність: Забезпечується штрафами за dydx≥0. Експоненціальна форма природно монотонна, оскільки $a,b\geq 0$, а e^{-bx}>0. Криві плавно зростають без спадів, що відповідає фізичній формі огівального профілю.

Аеродинамічна ефективність: Переоцінення в передній (~0.95–1.06 мм) і середній (~0.71–0.88 мм) зонах значно підвищує опір. Горизонтальна дотична частково компенсує це в задній зоні.

Відповідність огівальному профілю: Експоненціальна крива має значні відхилення, що обмежує її застосування.

Логістична крива: $\boldsymbol{y = \frac{a}{1+e^{-b(x-c)}} + d}$**.** Логістичні криві на графіку рис. 7 відображають сигмоїдальну форму, з переоціненням у середній і задній зонах. SLSQP (RMSE = 0.136847) значно перевершує Powell (RMSE = 0.275325) і L-BFGS-B (RMSE = 0.218114). Сигмоїдальна форма обмежує точність у передній зоні. Найкращий метод: SLSQP (RMSE = 0.136847), що забезпечує $|\Delta y(0)|$=0.001мм, |Δy(26.509)|=0.001мм – висока точність, $\frac{dy}{dx}(x_{\max})$=0.01 (кут нахилу 0.57°) – відхилення близьке до горизонтальної дотичної.

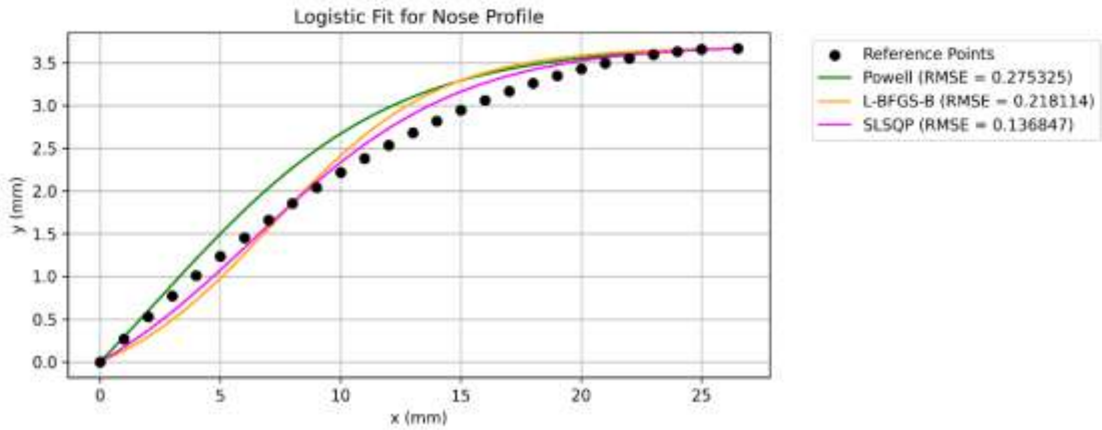

Рис. 7. Порівняння оптимізованих логістичних кривих для профілю носової частини снаряда

Монотонність: Забезпечується штрафами за *dy/dx*≥0. Сигмоїдальна форма природно монотонна, але штрафи необхідні для відповідності профілю.

Аеродинамічна ефективність: Логістична крива створює профіль із помірним опором через переоцінення в середній зоні (~0.2–0.3 мм). Горизонтальна дотична сприяє стабільності в задній зоні.

Відповідність огівальному профілю: Логістична крива має значні відхилення, особливо в середній зоні, що робить її менш придатною для точної апроксимації.

Крива Носека: $y=a\sqrt{x}+b\cdot x$. Криві Носека на графіку рис. 8 мають нелінійну форму з переоціненням у передній і середній зонах. SLSQP (RMSE = 0.674896) перевершує Nelder-Mead, L-BFGS-B, TNC (RMSE ≈0.707). Форма Носека погано відповідає огівальному профілю.Найкращий метод: SLSQP (RMSE = 0.674896), що забезпечує |Δy(0)|=0, |Δy(26.509)|=0,001мм – висока точність, $\frac{dy}{dx}(x_{\max})=0.01$ (кут нахилу 0.57°) – відхилення близьке до горизонтальної дотичної.

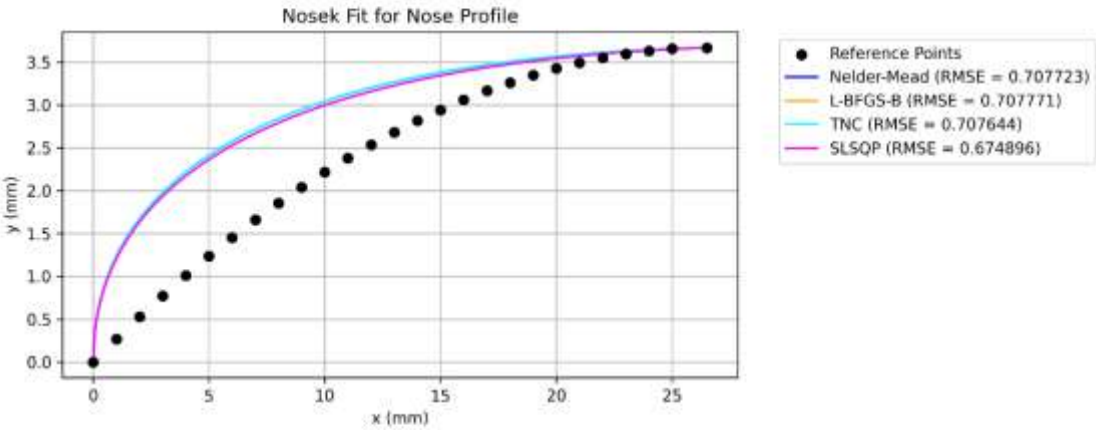

Рис. 8. Порівняння оптимізованих кривих Носека для профілю носової частини снаряда

Монотонність: Забезпечується штрафами за $dy/dx \geq 0$. Форма Носека підтримує монотонність, але штрафи є необхідними для її забезпечення.

Аеродинамічна ефективність: Значне переоцінення в передній (~1.27–1.65 мм) і середній (~0.76–1.03 мм) зонах підвищує опір. Горизонтальна дотична оптимізує задню зону.

Відповідність огівальному профілю: Крива Носека має значні відхилення, що робить її менш придатною.

Крива гіперболічного тангенсу: $y=a\cdot\tanh(b\cdot x-c)+d$. Графік гіперболічного тангенса рис. 9 показує сигмоїдальні криві з недооціненням у передній зоні та переоціненням у середній і задній. CG (RMSE = 0.218589) перевершує SLSQP (RMSE = 0.267571), Nelder-Mead, Powell і L-BFGS-B (RMSE ≈ 0.31–0.33). Сигмоїдальна форма обмежує точність. Найкращий метод: CG (RMSE = 0.218589) , що забезпечує $|\Delta y(0)|=3\cdot10^{-5}$, $|\Delta y(26.509)|=1\cdot10^{-4}$мм – висока точність, $\frac{dy}{dx}(x_{\max})=0.0044$ (кут нахилу 0.26°) – відхилення близьке до горизонтальної дотичної.

Монотонність: Забезпечується штрафами за $dy/dx \geq 0$. Сигмоїдальна форма підтримує монотонність, але штрафи необхідні для корекції. Монотонність виконана для всіх методів, оскільки $a,b \geq 0$ (обидва параметри додатні), а в похідній $\mathrm{sech}^2 \geq 0$. Криві монотонно зростають, що відповідає фізичній формі профілю.

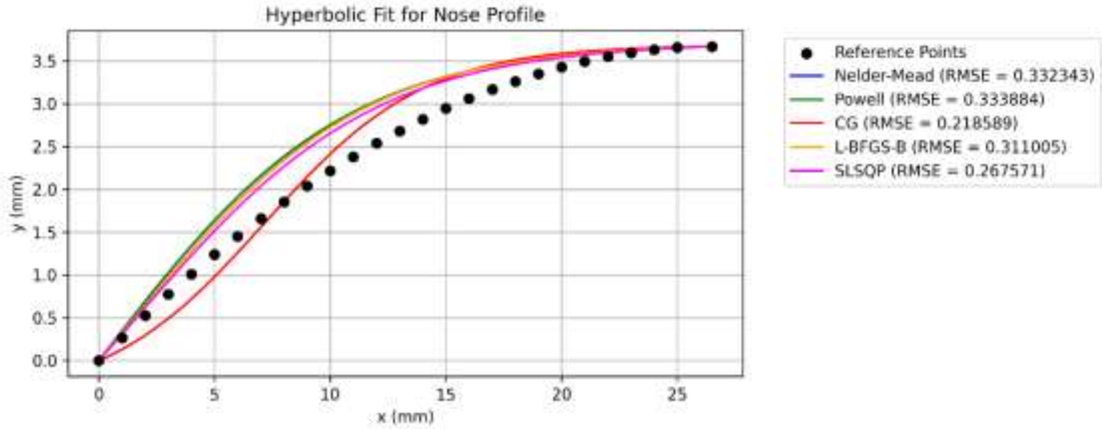

Рис. 9. Порівняння оптимізованих кривих гіперболічного тангенса для профілю носової частини снаряда

Аеродинамічна ефективність: Недооцінення в передній зоні (0.3 мм) і переоцінення в середній (0.24–0.44 мм) підвищують опір. Горизонтальна дотична забезпечує стабільність у задній зоні.

Відповідність огівальному профілю: Гіперболічний тангенс має значні відхилення, особливо в передній і середній зонах, що обмежує його застосування.

Дослідження апроксимації огівального профілю носової частини снаряда різними кривими виявило їхню здатність відповідати реперним точкам і фізичним вимогам, включаючи граничні умови, горизонтальну дотичну та монотонність. Криві можна класифікувати на три групи: поліноміальні (поліном 3-го степеня, парабола), сигмоїдальні (логістична, гіперболічний тангенс) та нелінійні (еліптична дуга, степенева, логарифмічна, експоненціальна, крива Носека). Усі криві досягають достатньої точності в задній зоні, але їхня поведінка в передній і середній зонах варіюється, що впливає на загальну точність і відповідність профілю.

Поліноміальні криві демонструють високу точність завдяки гнучкості. Поліном 3-го степеня найкраще апроксимує профіль, із мінімальними відхиленнями в усіх зонах, тоді як парабола, хоча й простіша, переоцінює профіль у передній і середній зонах. Сигмоїдальні криві, особливо гіперболічний тангенс, недооцінюють передню зону, але переоцінюють середню та задню, що обмежує їхню точність. Нелінійні криві, такі як логарифмічна, експоненціальна та крива Носека, мають значні відхилення в передній і середній зонах через їхню форму, яка погано відповідає огівальному профілю. Еліптична дуга та степенева крива показують помірну точність, але з переоціненням у передній зоні та недооціненням у задній для степеневої.

Штрафи за досягнення горизонтальної дотичної забезпечують виконання умови пологості в задній зоні, але високі значення штрафів призводять до переоцінення профілю, особливо для сигмоїдальних і нелінійних кривих. Поліноміальні криві менш чутливі до цього ефекту завдяки своїй гнучкості. Точність відповідності дотичній горизонтальності впливає на загальну точність: жорсткі обмеження покращують пологість, але можуть погіршувати відповідність у середній зоні, як видно для логістичної та гіперболічного тангенса. Послаблення цих обмежень, як у полінома, сприяє кращій відповідності профілю.

Спільною рисою всіх кривих є їхня здатність точно відтворювати задню зону профілю, тоді як передня та середня зони є критичними для точності. Поліноміальні криві рекомендуються для високоточної апроксимації, тоді як сигмоїдальні та нелінійні криві доцільні для специфічних аеродинамічних вимог, де форма важливіша за точність.

Висновки. На основі дослідження доцільності застосування дев'яти аналітичних кривих для моделювання носової частини балістичного снаряда сформульовано такі висновки:

Поліном 3-го степеня та парабола є найперспективнішими для опису аеродинамічних форм куль завдяки високій точності та гнучкості, тоді як сигмоїдальні (логістична, гіперболічний тангенс) і нелінійні криві (степенева, логарифмічна, експоненціальна, Носека) мають значні відхилення, обмежуючи їх застосування.

Методи оптимізації: SLSQP забезпечує найкращу збіжність, дозволяючи задавати обмеження для фізичної коректності, хоча для логістичної кривої втрачає точність. Методи без обмежень (Nelder-Mead, Powell) ефективні лише за наявності штрафів, але залежать від початкових оцінок. CG, BFGS і TNC не сходяться для складних кривих, таких як поліном чи еліптична дуга. Штрафні функції критично важливі для забезпечення монотонності та горизонтальної дотичної, компенсуючи недоліки методів.

Висновки підтверджують перевагу поліноміальних кривих і необхідність застосування штрафів відповідно до граничних умов для точного моделювання.

Література

1. Anderson, J. D.. Fundamentals of Aerodynamics (6th ed.). McGraw-Hill Education, 2016
2. Carlucci, D. E., & Jacobson, S. S. Ballistics: Theory and Design of Guns and Ammunition (3rd ed.). CRC Press, 2018.
3. Draper, N. R., & Smith, H. Applied Regression Analysis (3rd ed.). *Wiley-Interscience*, 1998.
4. Gupta, R., & Singh, A. Constrained Optimization of Polynomial Models for Ballistic Profiles Using SLSQP. *Optimization and Engineering*, 2019. 20(3), 789–810. https://doi.org/10.1007/s11081-019-09432-7
5. Kim, S., & Park, J. Hyperbolic Tangent Functions in Geometric Modeling of Projectile Shapes. *Aerospace Science and Technology*, 2022. 120, 107245. https://doi.org/10.1016/j.ast.2021.107245
6. Li, J., & Chen, H. Logistic Curve Modeling for Aerodynamic Profiles in Ballistic Applications. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2021. 9(5), 1123–1135. https://doi.org/10.4236/jamp.2021.95076

7. Motyl, E., & Gajewski, T. Optimization of Projectile Nose Shape for Aerodynamic Performance. *Journal of KONES Powertrain and Transport*, 2019. 26(4), 123–130. https://doi.org/10.2478/kones-2019-0090
8. Sahu, J. Numerical Computations of Supersonic Flow over Non-Axisymmetric Projectile Configurations. *AIAA Journal*, 2005. 43(8), 1781–1789. https://doi.org/10.2514/1.13839
9. Wang, X., & Zhang, Y. High-Order Polynomial Curve Fitting for Projectile Nose Design. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2020, 1–12. https://doi.org/10.1155/2020/9876543
10. Zhang, L., & Wu, Q. Penalty Function Approaches for Nonlinear Curve Fitting in Aerodynamic Design. *Computers & Mathematics with Applications*, (2023). 135, 45–56. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2022.12.015

RESEARCH OF ANALYTICAL CURVES IN GEOMETRIC MODELING OF PROJECTILE NOSE PROFILES

Dmytro Kotliar, Artem Kozlovskyi, Volodymyr Fomenko, Tetiana Tabler

This study investigates the feasibility of applying nine analytical curves for the geometric modeling of a ballistic projectile's nose section to achieve high aerodynamic efficiency. The research focuses on approximating the ogival profile while adhering to physical constraints, including the initial point, final height, horizontal tangent, and monotonicity. Various curve types were employed: polynomial (third-degree polynomial, parabola), sigmoidal (logistic, hyperbolic tangent), and nonlinear (elliptical arc, power, logarithmic, exponential, Nosek curve), enabling an evaluation of their ability to accurately reproduce the profile and meet aerodynamic requirements.

The methodology is based on numerical optimization using seven methods: Nelder-Mead, Powell, CG, BFGS, L-BFGS-B, TNC, and SLSQP. Penalty functions and direct constraints (for SLSQP) were applied to enforce physical constraints, ensuring compliance with boundary conditions and monotonicity. Penalty functions accounted for deviations from specified boundary points, tangent slope, and non-negative derivatives at key profile points. Optimization was performed by minimizing the root mean square error (RMSE) between reference points and modeled curves. The quality of approximation was assessed by analyzing deviations in the front, middle, and rear zones of the profile, alongside aerodynamic efficiency, which depends on profile smoothness and horizontal tangent compliance.

The study compared the curves based on fitting accuracy, numerical error stability, and physical correctness. Special attention was given to the impact of penalty functions on the convergence of optimization methods and their ability to compensate for limitations of unconstrained methods. Aerodynamic characteristics were analyzed, evaluating the effect of profile deviations on drag *and stability. The findings provide recommendations for selecting optimal curves and optimization methods for geometric modeling of aerodynamic shapes.*

The research highlights the importance of a comprehensive approach to modeling, combining analytical curves, numerical optimization, and physical constraints to achieve high accuracy and aerodynamic efficiency. The conclusions can be applied to improve ballistic projectile designs and related fields requiring precise geometric modeling of complex profiles.

Keywords: geometric modeling, ballistic projectile, analytical curves, aerodynamic efficiency, numerical optimization, penalty functions, polynomial curves, sigmoidal curves, nonlinear curves.

References

1. Anderson, J. D. (2016). Fundamentals of Aerodynamics (6th ed.). McGraw-Hill Education. [in English]
2. Carlucci, D. E., & Jacobson, S. S. (2018). Ballistics: Theory and Design of Guns and Ammunition (3rd ed.). CRC Press. [in English]
3. Draper, N. R., & Smith, H. (1998). Applied Regression Analysis (3rd ed.). Wiley-Interscience. [in English]
4. Gupta, R., & Singh, A. (2019). Constrained Optimization of Polynomial Models for Ballistic Profiles Using SLSQP. Optimization and Engineering, 20(3), 789–810. https://doi.org/10.1007/s11081-019-09432-7 [in English]
5. Kim, S., & Park, J. (2022). Hyperbolic Tangent Functions in Geometric Modeling of Projectile Shapes. Aerospace Science and Technology, 120, 107245. https://doi.org/10.1016/j.ast.2021.107245 [in English]
6. Li, J., & Chen, H. (2021). Logistic Curve Modeling for Aerodynamic Profiles in Ballistic Applications. Journal of Applied Mathematics and Physics, 9(5), 1123–1135. https://doi.org/10.4236/jamp.2021.95076 [in English]
7. Motyl, E., & Gajewski, T. (2019). Optimization of Projectile Nose Shape for Aerodynamic Performance. Journal of KONES Powertrain and Transport, 26(4), 123–130. https://doi.org/10.2478/kones-2019-0090 [in English]
8. Sahu, J. (2005). Numerical Computations of Supersonic Flow over Non-Axisymmetric Projectile Configurations. AIAA Journal, 43(8), 1781–1789. https://doi.org/10.2514/1.13839 [in English]
9. Wang, X., & Zhang, Y. (2020). High-Order Polynomial Curve Fitting for Projectile Nose Design. International Journal of Aerospace Engineering, 2020, 1–12. https://doi.org/10.1155/2020/9876543 [in English]
10. Zhang, L., & Wu, Q. (2023). Penalty Function Approaches for Nonlinear Curve Fitting in Aerodynamic Design. Computers & Mathematics with Applications, 135, 45–56. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2022.12.015 [in English]