

УДК 514.8

**АНАЛІЗ СУЧАСНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
СКЛАДНИХ ПРОСТОРОВИХ ФОРМ**

Морозова М.Ю.,

m123morozova@gmail.com,

Сидоренко О.С., канд. техн. наук,

OlenkaSergSydorenko@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5506-498X*Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут» (м. Харків, Україна)*

Роботу присвячено аналізу останніх досліджень складних просторових форм у різних галузях науки та техніки. Нині у геометрії, комп'ютерному моделюванні та інженерії особлива увага приділяється вивченню складних геометричних об'єктів (форм), зокрема просторових. Ключове місце у таких роботах посідає вивчення багатограних, решітчастих та взаємопов'язаних структур. У сучасних наукових роботах ці об'єкти розглядаються з точки зору як їхньої теоретичної корисності, так і практичного використання. Сьогодні геометричне проектування, моделювання та застосування складних просторових структур є актуальними для різних галузей людської діяльності і становить фундаментальну проблему, що має як теоретичне, так і прикладне значення. Зростаюча складність потреб науки, освіти та техніки, зумовлена стрімким розвитком людського суспільства, змушує дослідників шукати нові шляхи використання та методи впровадження складних просторових форм для вирішення широкого класу задач. Розуміння подібних структур є фундаментальним для вивчення їхніх характеристик та властивостей, що може становити велике значення як для технічних, так і для педагогічних наук. Присвячені темі наукові праці слугують для подальших досліджень у сферах вищої математики, комп'ютерних наук, інженерії, промисловості, архітектури, дизайну тощо. Для підтвердження актуальності теми пропонується огляд літературних праць останніх років, які стосуються вивчення складних геометричних об'єктів у просторі, їхніх характеристик і рекомендацій щодо практичного застосування. У статті здійснено аналіз і спроба систематизації праць з теми. Стаття має на меті розкриття основних напрямів досліджень, яких дотримуються сучасні науковці. Особливу увагу у роботі приділено галузям геометричного моделювання, комп'ютерної графіки та інших прикладних наук, спрямованих на візуалізацію складних геометричних структур.

Ключові слова: складні просторові форми, багатограник,

багатогранна структура, решітчаста структура, взаємопов'язана структура, комп'ютерна графіка, комп'ютерне моделювання, адитивний друк.

Постановка проблеми. Складні геометричні просторові форми, зокрема багатогранники, а також багатогранні і решітчасті структури, відіграють фундаментальну роль у різних науково-технічних і освітніх дисциплінах. На сьогодні проектування і дослідження таких структур виходять за межі суто математичних наук і знаходять застосування у інженерії, архітектурі, комп'ютерній графіці, тривимірному моделюванні, матеріалознавстві, важкій та легкій промисловості тощо. Тому розуміння методів побудови складних просторових об'єктів, а також їхніх особливостей та характеристик, є важливим для впровадження ефективних рішень у різних галузях людської діяльності: створенні нових видів матеріалів та конструкцій, моделюванні природничих явищ та процесів, дослідженнях когнітивного впливу у математичній педагогічній діяльності. Актуальність проблеми посилюється появою інноваційних технологій, таких як адитивний друк, доповнена реальність, інтерактивні освітні технології, реалізація яких є складною без глибокого розуміння і вивчення геометричної суті просторових об'єктів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Історія дослідження складних просторових форм має несталий характер, у різні роки фіксувався інтерес до теми як у геометрії, так і у суміжних дисциплінах. На сучасному етапі відзначаються нові зрушення у цьому процесі, що супроводжуються певним прогресом, здебільшого завдяки стрімкій появі нових обчислювальних методів та комп'ютерних потужностей.

У галузі теоретичної та обчислювальної геометрії проводяться дослідження властивостей багатогранників, які знаходять представлення на міжнародних наукових конференціях, таких як Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG 2024) та European Workshop on Computational Geometry (EuroCG 2025). Представлені там роботи охоплюють питання, пов'язані, наприклад, з вивченням розгортки багатогранників [1] або альфа-комплексів [2]. Такі дослідження поглиблюють знання з проектування і побудови складних структур, що може становити важливе значення для геометричного моделювання.

У інженерії та матеріалознавстві проводяться активні дослідження решітчастих структур, зокрема процесів проектування матеріалів на їхній основі або досліджень їхнього впливу при моделюванні явищ та процесів. При цьому учені у своїх роботах часто концентруються на спробах вирішити специфічні завдання або пояснити певні процеси різних наукових областей з точки зору просторових форм (наприклад, у проблемах термічного розширення [3] або поведінки акустичних хвиль [4]). Таким чином автори намагаються дійти до розуміння особливостей геометрії решітчастих структур у просторі та їхнього впливу на властивості явищ чи

об'єктів. Проводяться дослідження решітчастих структур і в аерокосмічній галузі з залученням технологій тривимірного друку [5]. На міждисциплінарний характер також вказує інтерес сучасних науковців до використання решітчастих структур у робототехніці [6].

Проте, незважаючи на зростаючий прогрес у дослідженнях складних просторових форм, багато проблем залишаються невирішеними. Основною з таких є відсутність уніфікованих підходів до проєктування, моделювання, візуалізації та аналізу багатогранних, решітчастих та взаємопов'язаних структур. Крім того, потребують подальшого розвитку ефективні алгоритми обчислень властивостей великих складних об'єктів, що є пов'язаним з постійною необхідністю наукової спільноти пристосовуватися до нових комп'ютерних потужностей. Поле для досліджень лишається також у встановленні специфіки і закономірностей характеристик та поведінки складних геометричних форм у просторі, а також виявленні нових можливостей застосування таких об'єктів. Таким чином, статтю присвячено огляду сучасних перспективних досліджень у вищезазначених питаннях з фокусуванням на систематизації виділених джерел.

Формулювання цілей статті. Основною метою статті є аналіз сучасного стану досліджень складних просторових форм (зокрема, багатогранників, багатогранних, решітчастих та взаємопов'язаних структур) у різних галузях людської діяльності на основі кола новітніх наукових джерел (переважно, 2022 – 2025 рр.). Також у роботі виконано спроби систематизації та категоріального групування джерел за напрямками досліджень.

Основна частина. Аналіз наукових праць, зокрема тих, що були представлені протягом останніх років і присвячені проєктуванню та моделюванню складних просторових об'єктів, дозволяє виділити декілька основних напрямів досліджень цих структур. Наукові джерела з теми можна розділити, головним чином, за категоріями, з точки зору яких досліджуються ті чи інші складні геометричні форми. Під час огляду та вивчення існуючих за обраною темою праць було виділено три основні напрями робіт:

1. Роботи, що розглядають складні просторові форми суто з точки зору геометричних об'єктів. Ця група включає дослідження у різних галузях вищої математики, фізики, хімії та інших інженерних та природничих наук, спрямовані на вивчення існуючих або відкриття нових характеристик таких об'єктів.

2. Роботи, у яких досліджуються складні просторові форми як елементи тем навчальних програм з вивчення геометрії середньої та старшої школи, коледжів та вищих навчальних закладів освіти. До цієї категорії можна віднести роботи:

2.1. Присвячені складнощам розуміння складних геометричних форм здобувачами освіти.

2.2. Присвячені проблемам у викладанні тем, пов'язаних з

візуалізацією та моделюванням таких структур педагогами.

2.3. Впливу візуалізованих складних просторових форм на когнітивні здібності здобувачів освіти, пам'ять, увагу та формування інших корисних навичок.

3. Роботи, у яких складні просторові форми розглядаються з точки зору їхнього практичного використання у різних галузях людської діяльності. Серед них можна виділити підкатегорії:

3.1. Комп'ютерні науки, геометричне моделювання та проєктування, адитивний друк.

3.2. Прикладна інженерія, механіка, машинобудування.

3.3. Архітектура, містобудування, дизайн, декоративно-ужиткове мистецтво.

3.4. Хімія, медицина, фармацевтика та інші галузі природничих наук.

3.5. Матеріалознавство та інші галузі легкої та важкої промисловості.

У роботах першої групи, тобто тих, що мають на меті дослідження просторових форм з точки зору їхньої побудови і характеристик, активно проводяться дослідження геометрії багатогранників, зокрема методів їхнього розсічення і розкладання на частини [1]. Такі дослідження знаходяться у тісному зв'язку з задачами розгортки та пакування багатогранників, що підкреслює широту наукових пошуків авторів у галузях теоретичної геометрії.

Автори робіт другої групи здебільшого пропонують розробки нових теоретичних моделей для навчання математиці, зокрема розглядають роль математичних робочих середовищ і їхніх можливостей під час освітніх занять. У сучасних роботах спостерігаються спроби вдосконалення моделі математичного робочого простору. Свідченням міждисциплінарності досліджень є те, що такі моделі здебільшого представляються у вигляді тривимірних багатогранників (здебільшого, трикутної призми), у яких кожна вершина відповідає за основні теоретичні поняття галузі [7].

Роботи третьої групи, до яких доцільно віднести дослідження складних просторових структур у практичних галузях людської діяльності, становлять великий відсоток від усього розглянутого матеріалу. Тут можна виділити статті, тези доповідей, дисертації тощо, присвячені вивченню комп'ютерних середовищ для побудови складних геометричних об'єктів, наприклад – як порівняльному аналізу програмного забезпечення для візуалізації багатогранних структур, так і вибору математичних алгоритмів побудови і представлення їхніх сіток [8]. Зокрема, автори пропонують нові підходи до візуалізації полігональних сіток, використовуючи можливості OpenGL [8] при роботі з трикутниками і за допомогою декількох алгоритмів тесселяції тривимірних моделей.

У цій групі робіт також активно розвиваються дослідження багатогранників у інженерно-промислових галузях. Наприклад, різних видів ланцюгових структур, зокрема додекаедричних [9]. Одним з основних напрямів застосування таких структур називають створення

нових типів каркасів або варіантів їхньої побудови, а також можливості створення матеріалів з різними характеристиками. Цей напрям визначається сучасними науковцями як перспективний, оскільки нові матеріали та конструкції можуть мати унікальні механічні властивості, наприклад, високу міцність чи стійкість до деформації, що може бути корисним при виготовленні матеріалів, здатних поглинати енергію [10]. Такі дослідження, в свою чергу, можуть бути основою для розвитку галузей матеріалознавства, геодезії, кристалографії, авіонавтики, особливо з залученням технології адитивного друку. У механіці та машинобудуванні дослідники пропонують нові типи кріплень та композитних збірок на основі взаємопов'язаних структур [10]. У медицині та фармацевтиці теоретичні знання про геометрію складних просторових об'єктів використовуються для створення нових видів та форм таблеток [11].

Як показують сучасні дослідження, складні просторові форми можуть розглядатися не лише з точки зору їхнього функціонального застосування, але і як естетико-декоративні об'єкти. Таким чином, використання складних форм в архітектурі, дизайні, декоративно-ужитковому мистецтві дозволяє планувати нові види об'єктів не лише з огляду на їхню практичну корисність. Зокрема, в архітектурі та будівництві для проектування будівель все частіше пропонуються нові нестандартні рішення з використання просторових фрактальних форм [12].

Загалом, систематизація наукових робіт з теми показує, що її вивчення має не лише теоретичне, але і практичне значення, оскільки ці геометричні структури все частіше стають об'єктом використання у різних галузях людської діяльності, що змушує дослідників шукати нові методи аналізу, класифікації, побудови та візуалізації таких об'єктів, а, отже, стимулює подальші наукові пошуки.

Висновки. Проведений аналіз сучасних досліджень складних просторових форм демонструє високий рівень зацікавленості наукової спільноти. Огляд останніх праць показує, що вони сфокусовані, здебільшого, на вивченні теми з трьох напрямів: суто математичному, освітньому та промислово-практичному. Чимало робіт присвячено добору оптимальних інструментів для моделювання та візуалізації складних просторових об'єктів або їхніх складових (вершин, граней, сіток тощо), серед яких розглядаються динамічні геометричні середовища, системи автоматизованого проектування, тривимірні графічні редактори. Застосування цих технологій, на думку сучасних авторів, дозволяє перейти від статичних креслень до інтерактивних моделей, що краще відображає структуру об'єктів і сприяє глибшому розумінню просторових характеристик.

Отже, геометричне моделювання складних просторових об'єктів виступає не лише областю теоретичних досліджень, а й можливим засобом практичних інновацій, що відкриває нові освітні та наукові перспективи. Подальшому розвитку цього напрямку може сприяти використання

ефективних програмних засобів, а також нових алгоритмів і моделей, що і доводять активні дослідження і інтерес науковців до теми загалом.

Література

1. Akpanya R., Rivkin A., Stock F. On inside-out dissections of polygons and polyhedra. *31st annual fall workshop on computational geometry*, Medford, 15–16 November 2024. Medford, 2024. URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2411.06584>.
2. D. Attali et al. When alpha-complexes collapse onto codimension-1 submanifolds. 2024. 56 p. (Preprint. hal-04790473).
3. Zhang Q., Sun Y. A series of metamaterials exhibiting negative thermal expansion inspired by leaflet pattern in compound leaf. *Composite structures*. 2025. P. 118883. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2025.118883>.
4. X.Y. Chong et al. Design of the reconfigurable rotationally symmetric resonant functional unit and curved metasurface for acoustic wavefront modulation *Composite structures*, 2025. P. 118873. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2025.118873>.
5. Agwu U. O. Design, analysis, and fabrication of lattice structures for structural and thermal applications. Pittsburgh, 2024. 162 p.
6. L. Chin et al. Flipper-Style locomotion through strong expanding modular robots. *IEEE robotics and automation letters*, 2022. Pp. 1–8. URL: <https://doi.org/10.1109/lra.2022.3227872>.
7. Panqueban D., Henríquez-Rivas C., Kuzniak A. Advances and trends in research on mathematical working spaces: a systematic review. *Eurasia journal of mathematics, science and technology education*, 2024. Vol. 20, no. 6. P. em2450.
8. Maunoury M., Loseille A., Feuillet R. Vizir: high-order mesh and solution visualization using OpenGL 4.0 graphic pipeline. *2018 AIAA Aerospace Sciences Meeting, Kissimmee, Florida*. – Reston, VA: AIAA, 2018. 6p. DOI: 10.2514/6.2018-1174.
9. Jencyk J. Regular dodecahedron-based network structures. *Symmetry*. 2024. Vol. 16, no. 11. P. 1509.
10. Tavoosi Gazkoh M., Lin X., Zhou A. Advancing topological interlocking structures: Recent developments, applications, and challenges in civil engineering. *International Journal of Concrete Structures and Materials*, 2024. Vol. 18, no. 1. Art. № 91. 18 p. DOI: 10.1186/s40069-024-00735-3.
11. J. Bernatoniene et al. The Future of Medicine: How 3D Printing Is Transforming Pharmaceuticals. *Pharmaceutics*, 2025. Vol. 17, no. 3. 390 p.
12. Луценко А. Фрактальна геометрія у формоутворенні дизайну. *Молодий вчений*, 2022. № 12 (112). С. 46–50.

ANALYSIS OF RECENT RESEARCH ON COMPLEX SPATIAL FORMS

Maryna Morozova, Olena Sydorenko

The work is devoted to the analysis of recent research on complex spatial forms in various fields of science and technology. Currently, in geometry, computer modeling, and engineering, special attention is focused on the study of complex geometric objects (forms), particularly spatial ones. The main role in such works is occupied by the study of polyhedral, lattice, and interconnected structures. In modern scientific works, these objects are considered from the point of view of both their theoretical utility and practical use. Today, geometric design, modeling, and application of complex spatial structures are relevant for various fields of human activity and constitute a fundamental problem that has both theoretical and applied significance. The growing complexity of the needs of science, education, and technology, caused by the rapid development of human society, forces researchers to look for new ways of using and methods of implementing complex spatial forms to solve a wide class of problems. Understanding such structures is fundamental for studying their characteristics and properties, which can be important for both technical and pedagogical sciences. Scientific works devoted to this topic serve as a basis for further research in the fields of higher mathematics, computer science, engineering, manufacturing industry, architecture, design, etc. To confirm the relevance of the topic, a review of recent literature related to the study of complex geometric objects in space, their characteristics, and recommendations for practical application is proposed. The article analyzes and attempts to systematize works on the topic. The article aims to reveal the main directions of research pursued by modern scientists. Particular attention is paid to the fields of geometric modeling, computer graphics, and other practical sciences aimed at the visualization of complex geometric structures.

Keywords: complex spatial forms, polyhedron, polyhedral structure, lattice structure, interconnected structure, computer graphics, computer modeling, additive printing.

References

1. Akpanya R., Rivkin A., Stock F. (2024) On inside-out dissections of polygons and polyhedra. *31st annual fall workshop on computational geometry*, Medford, URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2411.06584>. [in English]
2. D. Attali et al. (2024) When alpha-complexes collapse onto codimension-1

- submanifolds (Preprint. hal-04790473). [in English]
3. Zhang Q., Sun Y. (2025) A series of metamaterials exhibiting negative thermal expansion inspired by leaflet pattern in compound leaf. *Composite structures*. P. 118883. Retrieved from: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2025.118883>. [in English]
 4. X.Y. Chong et al. (2025) Design of the reconfigurable rotationally symmetric resonant functional unit and curved metasurface for acoustic wavefront modulation. *Composite structures*. P. 118873. Retrieved from: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2025.118873>. [in English]
 5. Agwu U. O. (2024) Design, analysis, and fabrication of lattice structures for structural and thermal applications. Pittsburgh. 162 p. [in English]
 6. L. Chin et al. (2022) Flipper-Style locomotion through strong expanding modular robots. *IEEE robotics and automation letters*. 1–8. Retrieved from: <https://doi.org/10.1109/lra.2022.3227872>. [in English]
 7. Panqueban D., Henríquez-Rivas C., Kuzniak A. (2024) Advances and trends in research on mathematical working spaces: a systematic review. *Eurasia journal of mathematics, science and technology education*. Vol. 20, no. 6. P. em2450. [in English]
 8. Maunoury M., Loseille A., Feuillet R. (2018) Vizir: High-order mesh and solution visualization using OpenGL 4.0 graphic pipeline. *2018 AIAA aerospace sciences meeting*, Kissimmee, Florida. Reston, Virginia. 6p. DOI: 10.2514/6.2018-1174. [in English]
 9. Jencyk J. (2024). Regular dodecahedron-based network structures. *Symmetry*. Vol. 16, no. 11. P. 1509. [in English]
 10. Tavoosi Gazkoh M., Lin X., Zhou A. (2024). Advancing Topological Interlocking Structures: Recent Developments, Applications, and Challenges in Civil Engineering. *International Journal of Concrete Structures and Materials*. Vol. 18, no. 1. Art. № 91. 18 p. DOI: 10.1186/s40069-024-00735-3. [in English]
 11. J. Bernatoniene et al. (2025). The Future of Medicine: How 3D Printing Is Transforming Pharmaceuticals Pharmaceutics. Vol. 17, no. 3. P. 390. [in English].
 12. Lutsenko A. (2022). Fractal Geometry in Design Shaping. *Molodyi vchenyi*. No. 12 (112). P. 46–50 [in Ukrainian].