

УДК 517.956.3

## ВИЗНАЧЕННЯ МАСИ ПІВНЕСКІНЧЕНОЇ СТРУНИ

Фоменко В., канд. фіз.-мат. наук,

[fomenko.vladymyr@gmail.com](mailto:fomenko.vladymyr@gmail.com), ORCID: 0000-0002-0558-4688

Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (м. Запоріжжя, Україна)

*Розглядається півнескінченна (сингулярна) струна з невідомим розподілом густини. Маса струни також вважається невідомою і, можливо, нескінченною величиною. Лівий кінець струни, який має можливість ковзати за відомим законом  $f(t)$  по напрямку, перпендикулярному до її рівноважного стану, породжує поширювальну хвилю. Взаємодія цієї хвилі з лівим кінцем за час  $2T$  формує реакцію  $R(f)$ , яка вимірюється.*

*Як відомо, інформації  $f \rightarrow R(f)$  (вхід – вихід) достатньо, щоб розв'язати обернену задачу: знайти густину струни в кожній точці інтервалу  $(0; x(T))$ , захопленому хвилями до моменту часу  $T$ .*

*Одним із ефективних методів розв'язання цієї задачі є ВС-метод (Boundary Control method, М. Белішев, 1986) – підхід до обернених задач, ґрунтовний на їх зв'язку з теорією межового керування. В ВС-методі використовуються хвилі, які поширюються вглиб, розсіюються на неоднорідностях струни та приносять інформацію на межу.*

*ВС-метод дозволяє по відомій реакції на межі знаходити параметри струни оптимальним за часом чином: глибина відновлення пропорційна часу спостереження на межі. Ця властивість найбільш актуальна в геофізичних дослідженнях оскільки саме вона дозволяє відновлювати параметри середовища в реальному часі. Припустимо, що зовнішній спостерігач має можливість проводити вимірювання тільки на межі (лівому кінці) струни. Виникає питання: яку інформацію про якісний характер спектра струни він може отримати з цих вимірювань?*

*Як відомо, скінченність повної маси струни є необхідною умовою дискретності її спектра [2], [3]. Отже, скінченність або нескінченність маси струни є важливою інформацією для якісного аналізу спектра струни.*

*В роботі в термінах даних оберненої задачі на півосі (за відомими операторами реакції  $R(f)$  для всіх  $T$ ) отримана формула повної маси неоднорідної струни з невідомим розподілом густини. Отримана формула надає можливість ефективної перевірки необхідної умови дискретності спектра сингулярної струни.*

*Ключові слова: гіперболічні рівняння, сингулярна крайова задача, обернена задача, півнескінченна струна, метод межового керування, оператор реакції.*

**Постановка проблеми.** Розглянемо півнескінченну неоднорідну струну, натягнутою одиничною силою вздовж півосі  $x \geq 0$ . Густина струни  $\rho(x) > 0$  вважається *невідомою* функцією.

Лівий кінець струни, який має оживість ковзати за відомим законом  $f = f(t)$  по напрямку, перпендикулярному до її рівноважного стану, породжує поширювальну хвилю  $u^f(x, t)$ . Взаємодія цієї хвилі за час  $T$  з лівим кінцем формує *реакцію*  $R^T(f)$ , яка вимірюється.

Проблема, яка розглядається в роботі, така: яку інформацію щодо якісного характеру спектра струни можна отримати, проводячи виміри тільки на лівому кінці струни? Як саме це зробити?

Як буде показано нижче, щоб розв'язати цю задачу, потрібно відповісти на питання: як за реакцією на межі  $R^T$ , якщо вона відома при довільних проміжках часу  $T$ , знайти повну масу струни  $m$ ?

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Дослідження відносяться до якісного аналізу спектра сингулярного диференціального оператора другого порядку, асоційованого з динамічною задачею на струні.

Різноманіття наявних результатів щодо якісного аналізу спектра диференціальних операторів залежно від поводження його коефіцієнтів відображають, наприклад, відомі монографії І.М. Глазмана [3] та А. Zettl [5]. Ця робота стимульована класичною роботою М.Г. Крейна та І.С. Каца [2], у якій встановлюється *критерій дискретності спектра* сингулярної струни.

Дослідження проводиться у рамках *ВС-метода* (Boundary Control method; М. Belishev, 1986), який зв'язує обернені задачі з теорією межового керування. Це підхід до *обернених задач*, у якому використовуються результати функціонального аналізу, теорії керування та асимптотичні методи. ВС-метод дозволяє знаходити параметри середовища оптимальним за часом чином: глибина відновлення пропорційна часу спостереження на межі. Ця властивість найбільш актуальна в *геофізичних дослідженнях*, оскільки саме вона дозволяє відновлювати параметри середовища в реальному часі. У цьому відмінність ВС-методу від інших методів розв'язання обернених задач; крім того, він практично *не вимагає апріорної інформації* про середовище та узагальнюється на багатовимірні задачі.

**Формулювання цілей статті.** Метою статті є знаходження повної маси півнескінченної струни виключно по вимірюванням на межі (лівому кінці) та використання цієї інформації для якісного аналізу спектра сингулярного диференціального оператора, асоційованого з динамічною задачею на півосі (струні).

## **Основна частина.**

### **2. Кінематика.**

**2.1. Ейконал.** Струна ототожнюється з піввіссю  $[0; \infty)$  і заданою на ній додатною функцією (густиною)  $\rho \in C_{loc}^2[0; \infty)$ . Швидкість хвилі є

$c(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}$ . Час, за який хвиля, що ініційована на кінці  $x = 0$  і рухається уздовж струни зі змінною швидкістю  $c(x)$ , заповнює відрізок  $[0; x]$ :

$$\tau(x) := \int_0^x \frac{ds}{c(s)} = \int_0^x \sqrt{\rho(s)} ds, \quad x \geq 0,$$

називається *ейконалом*; це монотонно зростаюча додатна функція, така, що  $\tau(0) = 0$ .

Множина

$$\Omega^t := \{x > 0 | \tau(x) < t\} = (0, x(t))$$

є інтервал струни, що заповнюється хвилями до моменту часу  $t$ . Маса цього інтервалу є

$$m(t) := m(x(t)) = \int_0^{x(t)} \rho(s) ds, \quad t > 0.$$

Далі буде показано, що масу  $m(t)$  інтервала струни  $(0, x(t))$ , що заповнюється хвилями до моменту  $t$ , можна ефективно знаходити за даними оберненої задачі (за відомим оператором  $R^{2t}$ ). Це дозволить також знайти густину  $\rho(x(t)) = [m'(t)]^2$  в точці  $x = x(t)$  на передньому фронті хвилі.

Якщо сім'я операторів  $R^{2t}$  відома для довільних  $t$ , то мається можливість знайти повну масу півнескінченної струни

$$m = \lim_{t \rightarrow \infty} m(t).$$

### 3. Динаміка.

3.1. Початково-крайова задача. Фіксуємо  $T: 0 < T < \infty$  і розглянемо задачу

$$\rho u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad 0 < t < T, \quad (3.1)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0, \quad (3.2)$$

$$u = f, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.3)$$

з гладким змінним коефіцієнтом  $\rho = \rho(x) > 0$ .

Функція  $f = f(t)$  називається *межевим керуванням*. Вона описує зміщення точок межі, що ініціюють хвильовий процес в  $\Omega := (0; \infty)$ .

Розв'язок  $u = u^f(x, t)$  (хвиля) описує вертикальне зміщення точок струни. Коректність цієї задачі встановлюється стандартним чином: за допомогою заміни змінних  $x \rightarrow \tau$ , формули Даламбера і зворотної заміни  $\tau \rightarrow x$  вона зводиться до інтегрального рівняння типу Вольтерра другого роду; потім встановлюється його розв'язність в адекватному класі функцій [1].

Будемо вважати, що

$$\int_0^\infty \sqrt{\rho(x)} dx = \infty. \quad (3.4)$$

Ця умова, яка означає, що хвиля пробігає всю півнескінченну струну за нескінченний час, гарантує *коректність* задачі для довільних  $T > 0$ .

Позначимо через  $\mathcal{M}^T$  клас функцій

$$\mathcal{M}^T := \{f \in C^2[0, T] | f(0) = f'(0) = f''(0) = 0\}.$$

**Лема** [1]. Для будь-якої функції  $f \in \mathcal{M}^T$  задача (3.1) – (3.3) має єдиний класичний розв'язок, який можна представити у вигляді

$$u^f(x, t) = \left[ \frac{\rho(0)}{\rho(x)} \right]^{\frac{1}{4}} f(t - \tau(x)) + \int_x^{x(t)} w(x, s) f(t - \tau(s)) ds \quad (3.5)$$

( $x \geq 0, 0 \leq t \leq T$ ), де ядро  $w$  є двічі неперервно диференційована функція в області  $\{(x, t) | 0 \leq \tau(x) \leq s \leq T\}$ , така, що  $w(0, s) = 0, 0 \leq s \leq T$ .

Зазначимо, що права частина цієї рівності коректно означена при будь-якому  $f \in L_2[0, T]$ , і в подальшому вона розглядається як узагальнений розв'язок  $u^f$  задачі (3.1) – (3.3) для керувань з цього класу. Можна показати, що такий розв'язок задовольняє рівнянню струни у сенсі узагальнених функцій, причому  $u^f \in C([0, T]; L_2(\Omega^T))$ .

### 3.2. Властивості хвиль.

1. Згідно з (3.5) маємо  $u^f(x, t) \equiv 0$  для  $x > x(t)$ , що веде до включення

$$\text{supp } u^f(\cdot, t) \subset \bar{\Omega}^t = [0, x(t)], \quad t \geq 0 \quad (3.6)$$

Воно показує, що хвиля  $u^f(\cdot, t)$  поширюється уздовж струни, заповнюючи інтервал  $\Omega^t$ . Її передній фронт  $x(t)$  рухається зі змінною швидкістю  $x'(t) = \rho^{-\frac{1}{2}}(x(t))$ . Просторово-часова траєкторія переднього фронту є лінія  $\{(x, t) | t = \tau(x), x \geq 0\}$ , яка є характеристикою рівняння струни.

2. Для будь якого класичного (двічі диференційованого) розв'язку  $u^f$  (3.6) означає, що  $u^f$  анулюється поблизу характеристики  $t = \tau(x)$  разом з першими і другими похідними. Тому, на передньому фронті гладкої хвилі виконуються співвідношення

$$u^f(x(t), t) = u_t^f(x(t), t) = u_x^f(x(t), t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.7)$$

3. Відомою властивістю, яка впливає з гіперболічності системи (3.1) – (3.3) є локальний характер залежності  $u^f$  від  $\rho(x)$  (*принцип локальності*). При заданому керуванні  $f$  розв'язок  $u^f(x, t)$  для  $(x, t): x \in \Omega^T, 0 < t < 2T - \tau(x)$  однозначно визначається  $\rho|_{\Omega^T}$  і не залежить від поведінки густини поза відрізком  $[0, x(T)]$ .

**3.3. Динамічна система  $\alpha^T$ .** Тут і далі задача (3.1) – (3.3) розглядається, як динамічна система, що позначається через  $\alpha^T$ , яка забезпечується атрибутами теорії керування – просторами і операторами.

Простір керувань  $\mathcal{F}^T := L_2(0, T)$  зі скалярним добутком

$$(f, g)_{\mathcal{F}^T} := \int_0^T f(t)g(t) dt$$

називається *зовнішнім простором* системи  $\alpha^T$ . Хвиля  $u^f(\cdot, t)$  розглядається як *стан* системи в момент часу  $t$ . Простір

$$\mathcal{H}^T := L_{2,\rho}(\Omega^T)$$

зі скалярним добутком

$$(u, v)_{\mathcal{H}^T} := \int_0^{x(T)} \rho(x) u(x) v(x) dx \quad (3.8)$$

називається *внутрішнім*. В силу (3.6), кожний стан злокалізований на відрізку  $[0, x(T)]$  і належить простору  $\mathcal{H}^T$ .

3.4. *Оператор реакції*. Відповідність "вхід  $\mapsto$  вихід" в системі  $\alpha^T$  реалізується *оператором реакції*  $R^T: \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^T$ , означеним на щільному лінеалі  $\mathcal{M}^T$  за правилом

$$(R^T f)(t) := u_x^f(0, t), \quad 0 < t < T. \quad (3.9)$$

У механіці  $u_x^f(0, t)$  інтерпретується як значення (в момент часу  $t$ ) сили, яка була породжена на кінці струни  $x = 0$  хвильовим процесом, ініційованим керуванням  $f$ . Оскільки в дії оператора реакції бере участь диференціювання, він виявляється *необмеженим*.

Можна показати, що оператор  $R^T$  діє неперервно з класу Соболева  $\{f \in W_2^1[0, T] | f(0) = 0\}$  з нормою

$$\|f\|_{W_2^1[0, T]} := \left( \int_0^T (f^2(t) + f'^2(t)) dt \right)^{1/2}$$

у простір  $\mathcal{F}^T$ . Тому він може бути розширений на цей клас по неперервності. Вважаємо, що це розширення виконано (за розширеним оператором зберігаємо позначення  $R^T$ ) і покладемо

$$\mathcal{D}(R^T) := \{f \in W_2^1[0, T] | f(0) = 0\}.$$

Оператор  $R^T$  щільно заданий, тому означений спряжений  $(R^T)^*$ . Неважко перевірити, що спряжений оператор

$$(R^T)^*: \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^T$$

означений на множині

$$\mathcal{D}((R^T)^*) := \{f \in W_2^1[0, T] | f(T) = 0\} \quad (3.10)$$

У подальшому нам знадобиться оператор  $R^{2T}: \mathcal{F}^{2T} \rightarrow \mathcal{F}^{2T}$ ,

$$\mathcal{D}(R^{2T}) := \{f \in W_2^1[0, 2T] | f(0) = 0\},$$

$$(R^{2T} f)(t) := u_x^f(0, t), \quad 0 < t < 2T,$$

який відповідає задачі вигляду (3.1) – (3.3) з фінальним часом  $2T$ .

В силу принципу локальності (п. 3, розд. 3.2), розв'язок  $u^f$ , а з ним і похідна  $u_x^f(0, t)$ ,  $0 \leq t \leq 2T$ , визначаються поведінкою густини  $\rho(x)$  в  $\Omega^T$ . Отже, оператор  $R^{2T}$  визначається значеннями  $\rho|_{\Omega^T}$  і не залежить від поводження густини, якщо  $x > x(T)$ .

*Обернена задача для струни на півосі:* за заданим оператором реакції  $R^{2T}$  визначити масу  $m(T)$  інтервалу  $(0, x(T))$ , захопленого хвилями до моменту часу  $T$ .

4. *Керованість.* Тут розглядається питання: чи можливо з межі керувати формою хвилі на струні? Точніше, чи можливо за рахунок підбіра межевого керування  $f$  перевести систему  $\alpha^T$  з нульового початкового стану (3.2) в заданий фінальний стан  $u^f(\cdot, T) = y$ ? Зрозуміло, що для розв'язності цієї задачі, в силу (3.6) необхідно, щоб носій

$$\text{supp } y \subset \bar{\Omega}^T = [0, x(T)], \quad T \geq 0.$$

4.1. *Задача межевого керування.* За заданої функції  $y \in \mathcal{H}^T$  потрібно знайти таке керування  $f \in \mathcal{F}^T$ , щоб була виконана рівність:

$$u^f(\cdot, T) = y. \quad (4.1)$$

Як можна показати, відображення  $f \rightarrow u^f(\cdot, T) \in \mathcal{H}^T$  є *ізоморфізмом* з  $\mathcal{F}^T$  на  $\mathcal{H}^T$  (відображення просторів є ізоморфізмом, якщо воно є лінійним, неперервним та бієктивним, і обернене відображення також є неперервним).

Звідси випливає, що для довільного  $y \in \mathcal{H}^T$  задача (4.1) має єдиний розв'язок  $f$  який неперервно залежить від правої частини  $y$ . Крім того, якщо  $y \in C(\bar{\Omega}^T)$ , то розв'язок  $f \in C[0, T]$ .

В теорії керування множина станів

$$\mathcal{U}^T := \mathcal{R}(W^T) = \{u^f(\cdot, T) | f \in \mathcal{F}^T\}$$

називається *досяжною* (до моменту  $t = T$ ). З ізоморфізму відповідності  $f \rightarrow u^f(\cdot, T)$  випливає рівність

$$\mathcal{U}^T = \mathcal{H}^T, \quad (4.2)$$

яка тлумачиться, як *точна межева керованість* системи  $\alpha^T$ . Таким чином, задача керування формою хвилі на струні є коректною.

4.2. *Зв'язувальний оператор.* Оператор  $C^T: \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^T$ , який задається рівністю

$$(C^T f, g)_{\mathcal{F}^T} = (u^f(\cdot, T), u^g(\cdot, T))_{\mathcal{H}^T} \quad (4.3)$$

називається *зв'язувальним оператором* системи  $\alpha^T$ . Отже,  $C^T$  зв'язує скалярні добутки зовнішнього  $\mathcal{F}^T$  і внутрішнього  $\mathcal{H}^T$  просторів динамічної системи  $\alpha^T$ .

Оскільки відображення  $f \rightarrow u^f(\cdot, T) \in \mathcal{H}^T$  є обмеженим оператором в  $\mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{H}^T$ , то маємо, що  $C^T$  є самоспряженим та обмеженим оператором в  $\mathcal{F}^T$ .

З керованості системи  $\alpha^T$  випливає слідство.

*Слідство.* Зв'язувальний оператор  $C^T$  є *додатно визначений ізоморфізм* простору  $\mathcal{F}^T$ .

Важливий факт полягає в тому, що зв'язувальний оператор  $C^T$  можливо знаходити за оператором реакції  $R^{2T}$ .

Введемо оператор  $S^T: \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^{2T}$  непарного продовження керувань відносно  $t = T$

$$(S^T f)(\cdot, t) := \begin{cases} f(\cdot, t), & 0 < t < T; \\ -f(\cdot, 2T - t), & T \leq t < 2T, \end{cases}$$

та оператор інтегрування  $J^{2T}: \mathcal{F}^{2T} \rightarrow \mathcal{F}^{2T}$ ,

$$(J^{2T} f)(\cdot, t) := \int_0^t f(\cdot, s) ds, \quad 0 < t < 2T.$$

Легко перевірити рівність:

$$((S^T)^* f)(\cdot, t) = f(\cdot, t) - f(\cdot, 2T - t), \quad 0 < t < 2T.$$

Можна довести, що справедливе зображення (М.І. Белішев)

$$C^T = -\frac{1}{2}(S^T)^* R^{2T} J^{2T} S^T. \quad (4.4)$$

(оператор  $R^{2T} J^{2T}$  виявляється обмеженим і може бути розширений з  $\mathcal{D}(R^{2T})$  на  $\mathcal{F}^{2T}$ ).

4.3. *Хвильовий базис.* У зовнішньому просторі  $\mathcal{F}^T$  виберемо довільний базис керувань  $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ ; без обмеження загальності можна вважати, що

$$(C^T f_i, f_k)_{\mathcal{F}^T} = \delta_{ik}$$

(дійсно, з будь-якого базису простору  $\mathcal{F}^T$  за процесом Шмідта відносно форми  $(C^T \cdot, \cdot)_{\mathcal{F}^T}$  можна отримати ортонормований базис).

Нехай  $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ , де

$$u_i := u^{f_i}(\cdot, T), \quad (4.5)$$

є сім'я хвиль, які породжені цими керуваннями.

Оскільки відображення  $f \rightarrow u^f(\cdot, T)$  є ізоморфізм, хвилі  $u_i$  складають базис в досяжному просторі  $\mathcal{U}^T$ .

В силу керованості (4.2) і рівності

$$(u_i, u_k)_{\mathcal{H}^T} \stackrel{(4.3)}{=} (C^T f_i, f_k)_{\mathcal{F}^T} = \delta_{ik},$$

система хвиль  $\{u_i^f\}_{i=1}^\infty$  виявляється ортонормованим базисом також і в  $\mathcal{H}^T$ . Він зветься *хвильовим базисом* внутрішнього простору  $\mathcal{H}^T$ .

Таким чином, знання оператора  $R^{2T}$  дозволяє створювати *ортонормовані базиси з хвиль* в  $\mathcal{H}^T$ . Підкреслимо, що самі хвилі невидимі для зовнішнього спостерігача, який знаходиться на межі струни в точці  $x = 0$ . Також зазначимо, що можливість знаходити скалярний добуток хвиль за оператором реакції вперше виявив

О.С. Благовещенській.

5. *Визначення маси інтервалу  $\Omega^T$  і повної маси струни.*

Розглянемо функцію  $\theta^T(x)$ , задану на півосі  $\Omega = (0, \infty)$ :

$$\theta^T(x) := \theta(x(T) - x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < x(T), \\ 0, & x(T) \leq x < \infty. \end{cases} \quad (5.1)$$

Значення

$$\|\theta^T\|_{\mathcal{H}^T} = \int_0^{x(T)} \rho(x) dx = m(T) \quad (5.2)$$

співпадає з масою інтервалу  $(0, x(T))$  струни, захопленого хвилями до моменту  $t = T$ .

Для довільного гладкого керування  $f \in C_0^\infty(0, T)$ , враховуючи, що

$$u^f(x, T) = \int_0^T u_{tt}^f(x, t)(T - t) dt,$$

маємо

$$\begin{aligned} (\theta^T, u^f(\cdot, T))_{\mathcal{H}^T} &\stackrel{(3.8)}{=} \int_0^{x(T)} \rho(x) \theta^T(x) u^f(x, T) dx \stackrel{(5.1)}{=} \\ &= \int_0^{x(T)} \rho(x) \left( \int_0^T u_{tt}^f(x, t)(T - t) dt \right) dx = \\ &= \int_0^T (T - t) \left( \int_0^{x(T)} \rho(x) u_{tt}^f(x, t) dx \right) dt \stackrel{(3.1)}{=} \\ &= \int_0^T (T - t) \left( \int_0^{x(T)} u_{xx}^f(x, t) dx \right) dt = \\ &= \int_0^T (T - t) [u_x^f(x, t)]|_0^{x(T)} dt \stackrel{(3.7)}{=} - \int_0^T (T - t) u_x^f(0, t) dt \stackrel{(3.9)}{=} \\ &= \int_0^T (t - T)(R^T f)(t) dt. \end{aligned}$$

Отже, для будь-яких гладких керувань  $f \in C_0^\infty(0, T)$  маємо рівність:

$$(\theta^T, u^f(\cdot, T))_{\mathcal{H}^T} = \int_0^T (t - T)(R^T f)(t) dt. \quad (5.3)$$

Враховуючи (3.10), легко бачити, що функція  $\kappa^T(t) := t - T$  належить до  $\mathcal{D}((R^T)^*)$ .

Таким чином, отримуємо, що для  $f \in C_0^\infty(0, T)$

$$(\theta^T, u^f(\cdot, T))_{\mathcal{H}^T} = \int_0^T (R^T)^*(t - T) f(t) dt. \quad (5.4)$$

Звідси, граничним переходом, враховуючи щільність гладких керувань з  $C_0^\infty(0, T)$  в  $L_2(0, T)$ , знаходимо, що ця рівність вірна для довільних  $f \in \mathcal{F}^T$ .

Зауважимо, що оскільки оператор реакції  $R^T$  не є неперервним в  $\mathcal{F}^T := L_2(0, T)$ , неможливо було одразу зробити зазначений граничний перехід в (5.3).

Нехай

$$c_i := (\theta^T, u_i)_{\mathcal{H}^T} \stackrel{(4.5)}{=} (\theta^T, u^{f_i}(\cdot, T))_{\mathcal{H}^T}$$

– коефіцієнти Фур'є в розвиненні функції  $\theta^T$  у ряд по хвильовому базису  $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ :

$$\theta^T = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i.$$

Враховуючи (5.2) та  $C^T$ -ортонормованість хвильового базису, отримуємо

$$m(T) = \|\theta^T\|_{\mathcal{H}^T} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2.$$

Для будь-якого базису керувань  $\{f_i\}_{i=1}^\infty$  ( $f_i \in \mathcal{F}^T$ ), в силу (5.4) та (5.3),

$$c_i = \int_0^T (R^T)^*(t-T) f_i(t) dt = \int_0^T (t-T) (R^T f_i)(t) dt.$$

Звідси знаходимо, що маса інтервалу  $\Omega^T = (0; x(T))$ , захопленому хвилями до моменту часу  $t = T$ , є

$$m(T) = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \int_0^T (T-t) (R^T f_i)(t) dt \right). \quad (5.5)$$

## 6. Висновки.

1. Особливість і складність задачі – густина струни  $\rho(x)$  вважається невідомою додатною функцією  $\rho \in C_{loc}^2[0; \infty)$  з умовою

$$\int_0^{\infty} \sqrt{\rho(x)} dx = \infty \quad (6.1)$$

(оптична довжина струни нескінченна).

2. В термінах даних оберненої задачі для струни на півосі, якими є відомі оператори реакції  $R^{2T}$  ( $0 < T < \infty$ ), знайдена маса інтервала струни  $(0; x(T))$ , який заповнюється хвилями до моменту часу  $T$ . Це також дозволяє також знайти густину

$$\rho(x(T)) = [m'(T)]^2$$

в точці  $x = x(T)$  на передньому фронті хвилі.

3. Основна властивість розглянутої задачі – це керованість системи  $\alpha^T$ ; її слідством є існування хвильових базисів, і саме це, зрештою, дозволило отримати формулу (5.5).

4. Якщо маса інтервалу  $(0; x(T))$ , відома для довільних  $T$ , то повна маса струни

$$m = \lim_{T \rightarrow \infty} m(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \int_0^T (T-t) (R^T f_i)(t) dt \right). \quad (6.2)$$

Зауважимо, що ця границя може бути й *нескінченною*.

5. Скінченність повної маси струни є *необхідною* умовою дискретності спектра півнескінченної (сингулярної) струни [2], [3]. Отже, формула (6.2) надає можливість ефективної перевірки виконання необхідної умови дискретності спектра сингулярної струни.

Коли йдеться про спектр сингулярної струни, то мається на увазі спектр *самоспряженого оператора*  $\mathcal{L}$  в  $L_{2,\rho}(0;\infty)$ , який породжується заданим на функціях  $y \in C_0^\infty(0;\infty)$  мінімальним оператором

$$\mathcal{L}_0 y = -\frac{1}{\rho} y'',$$

і в якому змінний коефіцієнт  $\rho$  співпадає з густиною  $\rho(x)$  струни, для якої вимірюється реакція  $R^T$  на межі [4].

6. Якщо оптична довжина струни буде *скінченною*

$$\tau = \int_0^\infty \sqrt{\rho(x)} dx < \infty,$$

то задача (3.1) – (3.3) стає *некоректною* (губиться єдиність розв'язку), і ВС-метод не можна застосувати безпосередньо. Але відомо, що в цьому випадку спектр сингулярної струни буде *дискретним* [5], [6].

### *Література*

1. Л.П. Нижник. Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. К.: Наукова думка, 1991. 232 с.
2. И.С. Кац, М.Г. Крейн. Критерий дискретности спектра сингулярной струны. Изв. вузов. Математика, 1958. № 2. С. 136 – 153.
3. И.М. Глазман. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит, 1963. 344 с.
4. Н.І. Ахїєзер, І.М. Глазман. Теорія лінійних операторів у гільбертовому просторі. Т. 1, 2025. 331 с.
5. A. Zettl. Sturm-Liouville Theory. Providence: American Mathematical Society. Mathematical surveys and monographs, 2005. Vol. 121. 329 p.
6. W. Amrein, A. Hinz, D. Pearson. Sturm-Liouville theory: past and present. Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2005. 336 p.

## **DETERMINING THE MASS OF A SEMI-INFINITE STRING**

Volodymyr Fomenko

*A semi-infinite (singular) string with an unknown density distribution is considered. The mass of the string is also considered to be unknown and possibly infinite. The left end of the string, which can slide according to the known law  $f(t)$  in the direction perpendicular to its equilibrium state, generates a propagating wave. The interaction of this wave with the left end over a time of  $2T$  produces a response  $R(f)$ , which is measured.*

*As is known, the information  $f \rightarrow R(f)$  (input – output) is sufficient to solve the inverse problem: find the density of the string at each point of the interval  $(0; x(T))$  captured by the waves before the time  $T$ .*

*One of the effective methods for solving this problem is the BC method (Boundary Control method, M. Belishev, 1986), which is an approach to inverse problems based on their connection with the theory of boundary control. The BC method uses waves that propagate inward, scatter on the inhomogeneities of the string and bring information to the boundary.*

*The BC method allows one to find the parameters of the string in an optimal way in time based on the known response at the boundary: the reconstruction depth is proportional to the observation time at the boundary. This property is most relevant in geophysical studies, since it allows one to reconstruct the parameters of the medium in real time. Let us assume that an external observer has the ability to make measurements only at the boundary (left end) of the string. The question arises: what information about the qualitative nature of the string spectrum can he extract from these measurements?*

*As is known, the finiteness of the total mass of an string is a necessary condition for the discreteness of its spectrum [2], [3]. Therefore, the finiteness or infinity of the string mass is important information for the qualitative analysis of the string spectrum.*

*In this paper, in terms of the inverse problem data on the semiaxis (based on the known response operators  $R(f)$  for all  $T$ ), a formula for the total mass of an inhomogeneous string with an unknown density distribution is obtained. The obtained formula makes it possible to effectively test the necessary condition for discreteness of the spectrum of a singular string.*

*Keywords: hyperbolic equations, singular boundary value problem, inverse problem, semi-infinite string, boundary control method, response operator.*

### **References**

1. L. P. Nyzhnyk. (1991) Inverse scattering problems for hyperbolic equations. K.: Naukova Dumka. [in Russian]
2. I. S. Kats, M. G. Krein. (1958) Criterion for the discreteness of the spectrum of a singular string. *News of universities. Mathematics*. No. 2. 136 - 153. [in Russian]
3. I. M. Glazman. (1963) Direct methods for qualitative spectral analysis of singular differential operators. M.: State Publishing House of Physics and Mathematics Literature. [in Russian]
4. N. I. Akhiezer, I. M. Glazman. (2025) Theory of linear operators in Hilbert space. Vol. 1. [in Ukrainian]
5. A. Zettl. (2005) Sturm-Liouville Theory. Providence: American Mathematical Society. Mathematical surveys and monographs, Vol. 121. 329p.
6. W. Amrein, A. Hinz, D. Pearson. (2005) Sturm-Liouville theory: past and present. Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin.