

УДК 519.8

ПРО ДИНАМІЧНУ ЗАДАЧУ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН З ФІКСОВАНИМИ ЦЕНТРАМИ

Яковлев С.В., д-р фіз.-мат. наук,

svsyak7@gmail.com , ORCID: 0000-0003-1707-843X*Інституту математики, Лодзького університету технологій**(м. Лодзь, Польща)*

Кісельова О. М., д-р фіз.-мат. наук,

kiseleva47@ukr.net , ORCID: 0000-0003-4303-1707

Гарт Л.Л., д-р фіз.-мат. наук,

ll_hart@ukr.net , ORCID: 0000-0003-2617-7851

Кузенков О.О., канд. фіз.-мат. наук,

kuzenkov1986@gmail.com , ORCID: 0000-0002-6378-7993

Закутній Д.В.,

kuzenkov1986@gmail.com , ORCID: 0009-0007-4075-7488*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара**(м. Дніпро, Україна)*

У статті сформульовано та досліджено динамічну задачу оптимального розбиття множини (ОРМ) з фіксованими центрами, яка належить до класу задач просторового розподілу з динамічно змінюваними параметрами. Наведено формалізовану постановку задачі, алгоритм її розв'язання та результати чисельного експерименту, що підтверджують ефективність і точність запропонованого підходу. Актуальність обраної теми зумовлена широкою застосовністю задач оптимального розбиття у динамічному формулюванні для розв'язання прикладних задач у логістиці, управлінні ресурсами, плануванні обслуговування територій та інших галузях, де витрати мають часову залежність. На відміну від статичних модельних задач, у реальних умовах вартість транспортування між елементами може змінюватися у часі, що суттєво впливає як на пошук оптимального розв'язку, так і на значення цільового функціоналу. У роботі розглянуто декілька моделей вартості транспортування, включаючи лінійну, експоненційну та випадкову (стохастичну), що дозволяє покращити адаптацію моделей до конкретних прикладних ситуацій.

Для реалізації чисельного експерименту було розроблено спеціалізоване програмне забезпечення на мові Python, яке інтегрує сучасні чисельні методи, зокрема метод покрокової оптимізації, модифіковані градієнтні підходи, а також засоби графічного аналізу результатів. Модель ґрунтується на класичній постановці задачі оптимального розбиття з фіксованими центрами, проте вводить часову залежність у вартісні коефіцієнти, що дозволяє моделювати складні сценарії розподілу

з урахуванням фактору часу. Проведено порівняльний аналіз результатів моделювання як у динамічному, так і в статичному підходах, що дозволило виявити переваги динамічного формулювання: вищу точність, більшу гнучкість та адаптивність при зміні умов задачі.

Обчислення здійснювались на персональному комп'ютері з конфігурацією: Intel Core i7-12700K, 8 ядер, частота 3,6 ГГц; оперативна пам'ять 32 ГБ DDR4; накопичувач – SSD 2 ТБ. Отримані результати підтвердили не лише ефективність математичної моделі, а й правильність реалізації алгоритмів, що додатково проілюстровано графічними побудовами фазових траєкторій та візуалізацією отриманих розбиттів.

Ключові слова: динамічна задача, оптимальне розбиття множини, цільовий функціонал, фазова траєкторія, чисельні методи, часові залежності, Python.

Постановка проблеми. Оптимальне розбиття множин є однією з ключових проблем сучасної прикладної математики та теорії оптимізації, яка знаходить широке застосування в логістиці, інформатиці, біоінженерії, моделюванні складних систем та штучному інтелекті. Особливий інтерес становлять динамічні варіанти задач оптимального розбиття, коли умови задачі змінюються у часі, а розбиття має адаптуватися відповідно до динаміки системи. У даній роботі розглянуто найпростішу модель динамічного розбиття множини з урахуванням змін параметрів системи (зокрема, у термінах нескінченновимірної транспортної задачі, – вартості перевезення одиниці продукції), яка дозволяє побудувати фундаментальні підходи до більш складних задач. Обґрунтовано актуальність застосування нетрадиційних математичних методів для побудови ефективних алгоритмів розв'язання таких задач. Запропонований підхід може стати основою для створення нових класів математичних моделей оптимального управління в складних динамічних середовищах.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Динамічні задачі оптимального розбиття множин виникають у контекстах, де об'єкти, які підлягають класифікації або розподілу, змінюють свої властивості з часом, а структура розбиття має оптимізуватись з урахуванням цих змін. У класичному варіанті задача формулюється як знаходження такого розбиття множини на підмножини, яке мінімізує або максимізує задану цільову функцію за умови певних обмежень. У динамічній постановці додатково враховується зміна властивостей елементів множини або зміна самих елементів у часі. Серед найпоширеніших підходів до розв'язання таких задач [2] можна виділити: математичне програмування, методи динамічного програмування, графові та мережеві моделі, евристичні та метаевристичні алгоритми, машинне навчання та нейромережеві підходи.

Динамічні задачі теорії оптимального розбиття множин охоплюють широкий спектр прикладних і теоретичних підходів до кластеризації,

покриття, маршрутизації та ресурсного розподілу в умовах змінного середовища. В Україні ця проблематика досліджується як у прикладному, так і в фундаментальному контекстах.

Першість у створенні базової теорії саме неперервних задач оптимального розбиття множин як окремого розділу теорії нескінченновимірною математичного програмування належить науковій школі під керівництвом професорки Кісельової О.М. В роботах Кісельової О.М. та її учнів запропоновані оригінальні підходи до побудови оптимальних розбиттів у динамічних системах. У роботах [1], [7] наведено формалізовані постановки задач та можливі їх аналітичні розв'язки. Розглянуті модельні задачі в чітких постановках, до яких наведено алгоритми їх розв'язання та результати багаточисельних комп'ютерних експериментів, які наочно ілюструють та підтверджують аналітичні результати.

У роботах [2]-[5] здійснено аналіз глобальних постановок задач теорії оптимального розбиття множин в яких сформульовано та доведено ряд фундаментальних теорем, які, зокрема, дозволяють перейти від нескінченновимірних задач до скінченновимірних, перейти від задач з обмеженнями до задач без обмежень тощо.

У роботі [3] розглядаються динамічні задачі, особливості їх постановки, алгоритми розв'язання та наведені чисельні результати комп'ютерного експерименту. В роботі розглядається застосування означених методів для прикладних задач, обмеження які при цьому виникають та методи розв'язання задач при відсутності аналітичного розв'язку.

Особливості розв'язання неперервно-дискретних задач, які обумовлені додатковими умовами розглянутими Кісельовою О.М. та її учнями в роботах [4], [6], [8]. Дискретність задач обумовлено переліком обмежень як на постановку так і на алгоритми розв'язання таких задач. В роботі показано підходи, як узагальнені так і такі, що мають відношення до конкретних задач з використанням яких авторам вдається отримати чисельний, а у більшості випадків і аналітичний розв'язок задачі.

Серед основних праць закордонних авторів, що містять фундаментальні результати у питаннях теорії оптимального розбиття множин слід виділити роботи, зокрема, G. Buttazzo, G. Dal Maso, F. Santambrogio, B. Bourdin. Так в роботі [9] розглянуто задачі оптимального розбиття з використанням методів та алгоритмів варіаційного числення та теорії міри. Так у названій роботі описано, зокрема, загальні умови існування оптимальних розбиттів у задачах мінімізації енергії функціоналу з урахуванням обмежень на обсяг, міру чи геометрію компонент.

Таким чином, сьогодні теорія неперервних задач оптимального розбиття множин є інтегральною складовою нескінченновимірною математичного програмування. Вона поєднує аналітичну глибину, алгоритмічну складність та широку сферу застосування — від механіки до

штучного інтелекту. Актуальним є подальший розвиток як фундаментальної теорії (дослідження питань розв'язуваності, стійкості, збіжності, похибки, складності), так і прикладних засобів її реалізації.

Формулювання цілей статті. Метою цієї статті є розробка та дослідження математичної моделі динамічної задачі оптимального розбиття множини з фіксованими центрами, яка враховує часову змінність вартості транспортування.

Основна частина.

Предметна постановка задачі. Розглянемо неперервну однопродуктову динамічну задачу оптимального розбиття множин з E_n без обмежень із заданим положенням центрів підмножин [5] у такому вигляді.

Нехай Ω – обмежена замкнена вимірна за Лебегом множина в n -вимірному евклідовому просторі E_n .

Сукупність вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ множини $\Omega \subset E_n$ (серед яких можуть бути і порожні) назвемо можливим розбиттям цієї множини, якщо $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega$, $\text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0$, $i, j = 1, \dots, N$ ($i \neq j$), де $N > 0$ – задане натуральне число; $\text{mes}(\cdot)$ – міра Лебега.

Позначимо через Σ_Ω^N клас всіх можливих розбиттів множини $\Omega \subset E_n$ на задану кількість N її вимірних за Лебегом підмножин:

$$\Sigma_\Omega^N = \{\varpi \equiv \{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Omega^N : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \\ i, j = 1, \dots, N (i \neq j)\}.$$

Далі, через $\tau_1, \dots, \tau_N$ позначимо сукупність деяких еталонних точок для підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ відповідно, які назвемо центрами цих підмножин: $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega_i$, $i = 1, \dots, N$, і будемо вважати, що координати усіх центрів задані.

Математична постановка задачі. Знайти розбиття $\varpi = \{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_\Omega^N$ множини $\Omega \subset E_n$ і векторну функцію $c(x, \tau, t) = (c_1(x, \tau_1, t), \dots, c_N(x, \tau_N, t))$, визначену м.в. для $x \in \Omega$ при заданому фіксованому наборі центрів $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_N\} \subset \Omega^N$ та всіх $t \in [0, T]$, які забезпечують

$$\inf_{\varpi \in \Sigma_\Omega^N; c(\cdot, \cdot, \cdot) \in L_2^N(\Omega \times \Omega \times [0, T])} F(\varpi, c(\cdot, \cdot, \cdot)) \quad (1)$$

де

$$F(\varpi, c(\cdot, \cdot, \cdot)) = \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c_i(x, \tau_i, t) \cdot m(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx dt \quad (2)$$

за наявності умов:

$$\frac{\partial c_i(x, \tau_i, t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^N A_{ij} \cdot f_j(c_j(x, \tau_j, t)), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (3)$$

$$c_i(x, \tau_i, t_0) = c_{0i}(x, \tau_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

м.в. для $x \in \Omega$, при фіксованих $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega_i$, $i = 1, \dots, N$, та умови

замкненості системи

$$\sum_{i=1}^N A_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Тут $c_i(x, \tau_i, t)$, $i=1, \dots, N$, – шукані дійсні функції, визначені на $\Omega \times \Omega \times [0, T]$, які при будь-якому фіксованому $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega_i$ неперервно диференційовані за аргументом t на відрізку $[0, T]$ м.в. для $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$, обмежені та вимірні за аргументом x на Ω для всіх $t \in [0, T]$; $m(x, \tau_i)$, $c_{0i}(x, \tau_i)$ – задані дійсні функції, визначені на $\Omega \times \Omega$, обмежені та вимірні за аргументом $x \in \Omega$ при будь-якому фіксованому $\tau_i \in \Omega_i$ для всіх $i = 1, \dots, N$ (зокрема, $m(x, \tau_i)$ може відігравати роль метрики на $\Omega \times \Omega$); $f_i(c_i(x, \tau_i, t))$, $i=1, \dots, N$, – задані дійсні функції, неперервні та ліпшицеві в області свого визначення; $\rho(x)$ – задана невід'ємна функція, обмежена та вимірна на Ω ; a_i , $i=1, \dots, N$, – задані, як правило, невід'ємні числа; $0 \leq A_{ij} \leq 1$, $i, j = 1, 2, \dots, N$, – задані числові параметри; $T > 0$ та $t_0 \in [0, T]$ задані.

Тут та в подальшому інтеграли розуміються в сенсі Лебега. Будемо вважати, що міра множини межових точок підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ дорівнює нулю.

Пару $(\varpi^*, c^*(x, \tau, t))$, що доставляє функціоналу (2) мінімальне значення на множині $\sum_{\Omega}^N \times L_2^N(\Omega \times \Omega \times [0, T])$ за умов (3), (4), назовемо оптимальним розв'язком задачі (1)–(4). При цьому розбиття $\varpi^* = \{\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*\} \in \sum_{\Omega}^N$ назовемо оптимальним розбиттям множини $\Omega \subset E_n$ на N підмножин, а векторну функцію $c^*(x, \tau, t) = (c_1^*(x, \tau_1, t), \dots, c_N^*(x, \tau_N, t)) \in L_2^N(\Omega \times \Omega \times [0, T])$ – оптимальною фазовою траєкторією динамічної системи в задачі (1)–(4).

З предметної точки зору, незалежна змінна $t \in [0, T]$ у наведеній математичній постановці динамічної задачі оптимального розбиття може відігравати роль часової змінної, а $T > 0$ та $t_0 \in [0, T]$ – задані кінцевий та початковий моменти часу у досліджуваному динамічному процесі відповідно. Так, функції $f_i(c_i(x, \tau_i, t))$, $i = 1, 2, \dots, N$, у диференціальних зв'язках (3), що відображають динаміку цін на транспортування, можуть мати різний вигляд (див. формули (5)–(8)), в залежності від предметного змісту, який в неї вкладається, наприклад:

- модель інфляції/дефляції відображає схильність цін до постійного (експоненціального) зростання/спадання

$$f_i(c_i(x, \tau_i, t)) = d_i \cdot c_i(x, \tau_i, t), \quad (5)$$

$$x \in \Omega, \tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega_i, i = \overline{1, N}, 0 \leq t \leq T$$

- модель односторонньої цінової регуляції, коли, наприклад, державою встановлені певні обмеження на ціну перевезення (мінімальна/максимальна).

$$f_i(c_i(x, \tau_i, t)) = d_i \cdot c_i(x, \tau_i, t) \cdot \left(1 - \frac{c_i(x, \tau_i, t)}{K_1}\right), \quad (6)$$

$$x \in \Omega, \tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega_i, i = \overline{1, N}, K_1 > 0, 0 \leq t \leq T$$

- модель двосторонньої цінової регуляції, коли, наприклад, державою встановлені певний діапазон на ціну перевезення $K_1 \leq c_i(x, \tau_i, t) \leq K_2$.

$$f_i(c_i(x, \tau_i, t)) = d_i \cdot (c_i(x, \tau_i, t) - K_2) \cdot \left(1 - \frac{c_i(x, \tau_i, t)}{K_1}\right), \quad (7)$$

$$x \in \Omega, \tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega_i, i = \overline{1, N}, K_1, K_2 > 0, 0 \leq t \leq T$$

- модель дотаційної односторонньої цінової регуляції, коли, наприклад, державою встановлені граничні ціни, що забезпечується дотаціями

$$f_i(c_i(x, \tau_i, t)) = d_i \cdot c_i(x, \tau_i, t) \cdot \left(1 - \frac{c_i(x, \tau_i, t)}{K_1}\right) + Z, \quad (8)$$

$$x \in \Omega, \tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega_i, i = \overline{1, N}, K_1, Z > 0, 0 \leq t \leq T$$

У формулах (5)–(8) позначення слід розуміти у такому змісті: $d_i, i=1, \dots, N$, - задані дійсні коефіцієнти, що відображають схильність вартості транспортування одиниці продукції i -го центру споживачу до зростання/спадання; K_1, K_2 - задані невід'ємні коефіцієнти, що відображають порогові значення ціни (максимальне та мінімальне відповідно) на транспортування одиниці продукції для всіх $\tau_i, i=1, \dots, N$; Z - заданий невід'ємний коефіцієнт, що відображає обсяг дотацій, які здійснюються кожному з центрів постачання за одиницю часу.

В якості базової в роботі буде використана модель інфляції/дефляції (5).

Метод розв'язання задачі. Нехай $\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \sum_{\Omega}^N$ - деяке можливе розбиття вихідної замкненої обмеженої вимірної множини $\Omega \subset E_n$ на N її вимірних за Лебегом неперетинних підмножин.

Введемо у розгляд на множині $\Omega \subset E_n$ характеристичні функції $\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)$ підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ відповідно:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N \quad (9)$$

і переформулюємо задачу (1)–(4) у термінах характеристичних функцій підмножин у більш зручному вигляді. Потрібно знайти векторні функції $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \dots, \lambda_N^*(x)), x \in \Omega$ і $c^*(x, \tau, t) = (c_1^*(x, \tau_1, t), \dots, c_N^*(x, \tau_N, t)), x \in \Omega, \tau = \{\tau_1, \dots, \tau_N\} \subset \Omega^N, t \in [0, T]$, які забезпечують

$$\inf_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_1; c(\cdot, \cdot, \cdot) \in I_2^N(\Omega \times \Omega \times [0, T])} J(\lambda(\cdot), c(\cdot, \cdot, \cdot)), \quad (10)$$

де функціонал $J(\lambda(\cdot), c(\cdot, \cdot, \cdot))$ має вигляд:

$$J(\lambda(\cdot), c(\cdot, \cdot, \cdot)) = \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (c_i(x, \tau_i, t) \cdot m(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx dt \quad (11)$$

$$\Gamma_1 = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega; \quad (12)$$

$$\lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N\}$$

за умов (3)-(4). Очевидно, що для функціонала $F(\varpi, c(\cdot, \cdot, \cdot))$ виду (2) і функціонала $J(\lambda(\cdot), c(\cdot, \cdot, \cdot))$ виду (11) виконується рівність $J(\lambda(\cdot), c(\cdot, \cdot, \cdot)) = F(\varpi, c(\cdot, \cdot, \cdot))$.

Далі від задачі (10)–(12) за умов (3)–(4) з булевими значеннями функцій $\lambda_i(\cdot), i = 1, \dots, N$, перейдемо до відповідної задачі зі значеннями $\lambda_i(\cdot), i = 1, \dots, N$, що змінюються на відрізку $[0, 1]$.

Задача. Знайти векторні функції $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \dots, \lambda_N^*(x))$, $x \in \Omega$ і $c^*(x, \tau, t) = (c_1^*(x, \tau_1, t), \dots, c_N^*(x, \tau_N, t))$, $x \in \Omega$, $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_N\} \subset \Omega^N$, $t \in [0, T]$, які забезпечують

$$\inf_{\lambda(\cdot) \in \Gamma; c(\cdot, \cdot, \cdot) \in L_2^N(\Omega \times \Omega \times [0, T])} J(\lambda(\cdot), c(\cdot, \cdot, \cdot)), \quad (13)$$

де функціонал $J(\lambda(\cdot), c(\cdot, \cdot, \cdot))$ має вигляд:

$$J(\lambda(\cdot), c(\cdot, \cdot, \cdot)) = \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (c_i(x, \tau_i, t) \cdot m(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx dt, \quad (14)$$

$$\Gamma = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega; \quad (15)$$

$$0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N\}$$

за умов (3)-(4).

Перша компонента $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \dots, \lambda_N^*(x))$ оптимального розв'язку такої задачі м.в. для $x \in \Omega$ і для кожного $i = 1, \dots, N$ має вигляд:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо виконується умова (17)} \\ 0, \text{ в іншому випадку} \end{cases} \quad (16)$$

$$\int_0^T (c_i(x, \tau_i, t) \cdot m(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dt = \min_{k=1, N} \left(\int_0^T (c_k(x, \tau_k, t) \cdot m(x, \tau_k) + a_k) \rho(x) dt \right) \quad (17)$$

при заданих $\tau_i \in \Omega_i$, $i = \overline{1, N}$

Алгоритм розв'язання задачі:

1. Множину Ω включаємо в n -вимірний паралелепіпед Π , сторони якого паралельні осям декартової системи координат. Паралелепіпед Π покриваємо прямокутною сіткою.

2. Задаємо значення функцій $c_{0i}(x, \tau_i)$, $i = 1, \dots, N$, з початкових умов (3) в вузлах сітки.

3. Покриваємо відрізок $[0, T]$ сіткою з кроком h_t .

4. Для кожного вузла сітки та для кожного $\tau_i, i = 1, \dots, N$ розв'язуємо задачу Коші для системи ЗДР (3) на часовому відрізку $[0, T]$ та знаходимо

функції $c_i(x, \tau_i, t)$, $i=1, \dots, N$.

5. Визначаємо характеристичну функцію $\lambda^*(x)$ у вузлах сітки з пункту 1 за формулами (16), (17) при знайдених $c_i(x, \tau_i, t)$, $i=1, \dots, N$.

6. Знаходимо мінімальне значення цільового функціонала (14) при знайдених $\lambda^*(x)$ та $c_i^*(x, \tau_i, t)$, $i=1, \dots, N$.

Алгоритм розв'язання неперервної однопродуктової динамічної задачі оптимального розбиття множин з E_n без обмежень з заданим положенням центрів підмножин описаний.

Результати роботи програми. Описана вище задача з моделлю (5) у якості базової була розв'язана для двох модельних задач, що характеризуються заданими початковими умовами системи диференціальних рівнянь (2) та іншими параметрами моделі. Модельні задачі є нескінченновимірними задачами розбиття заданої області з фіксованими центрами підприємств, що виробляють однорідну продукцію для розподілення в цій області із заданою щільністю споживачів.

Модельна задача 1.

Споживачі деякої однорідної продукції, що виробляється двома підприємствами, неперервно розподілені в області $\Omega = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}): 0 \leq x^{(1)} \leq 1; 0 \leq x^{(2)} \leq 1\}$, задані координати розміщення підприємств $\tau_1(0.2; 0.5)$, $\tau_2(0.5; 0.7)$, $\tau_3(0.85; 0.85)$, для підприємств задана система відповідно до якої змінюється ціна на транспортування

$$\begin{cases} \frac{\partial c_1(x, \tau_1, t)}{\partial t} = A_{11}d_1c_1(x, \tau_1, t) + A_{12}d_2c_2(x, \tau_2, t) + A_{13}d_3c_3(x, \tau_3, t) \\ \frac{\partial c_2(x, \tau_2, t)}{\partial t} = A_{21}d_1c_1(x, \tau_1, t) + A_{22}d_2c_2(x, \tau_2, t) + A_{23}d_3c_3(x, \tau_3, t), & 0 \leq t \leq T, \\ \frac{\partial c_3(x, \tau_3, t)}{\partial t} = A_{31}d_1c_1(x, \tau_1, t) + A_{32}d_2c_2(x, \tau_2, t) + A_{33}d_3c_3(x, \tau_3, t) \end{cases} \quad (18)$$

з початковими умовами:

$$c_1^0 = 1, c_2^0 = 2, c_3^0 = 3. \quad (19)$$

В цій модельній задачі у якості $m(x, \tau_i)$ використана евклідова метрика.

Розв'язок задачі (18)-(19) описує вартість транспортування одиниці продукції з i -го підприємства до споживача з координатами (x, y) . Відомий попит $\rho(x, y)$ на продукцію для кожного пункту споживання з координатами (x, y) . Для простоти вважається $\rho(x, y) \equiv 1, \forall x \in \Omega$.

Множину споживачів можна розбити на зони обслуговування Ω_i споживачів i -им пунктом виробництва так, щоб

$$\bigcup_{i=1}^3 \Omega_i = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_k)_{i \neq k} = 0, \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (20)$$

Необхідно розбити множину споживачів Ω так, щоб мінімізувати функціонал (1), (2), (5) сумарних витрат на виробництво продукції та її доставку до споживача при умовах (3), (4) та $N=3$.

Для розв'язання сформульованої задачі область Ω була покрита прямокутною сіткою з вузлами (i, j) , $i = 1, \dots, 101$, $j = 1, \dots, 101$. Було отримано чисельний розв'язок системи (18), для якого був використаний метод Рунге-Кути 4-го порядку. Пошук розв'язку системи (18) було здійснено при $h_t = 0,001$, а для отриманих точок фазової траєкторії при $T = [0, 5; 1, 5; 2, 5; 3, 5]$ було розраховано вартість транспортування від кожного вузла (i, j) області Ω до центрів τ_1, τ_2 . Виходячи з критерію мінімальної вартості вузол (i, j) був віднесений до областей Ω_1, Ω_2 та Ω_3 відповідно. Результати чисельного експерименту наведені на рис.1 (а-е).

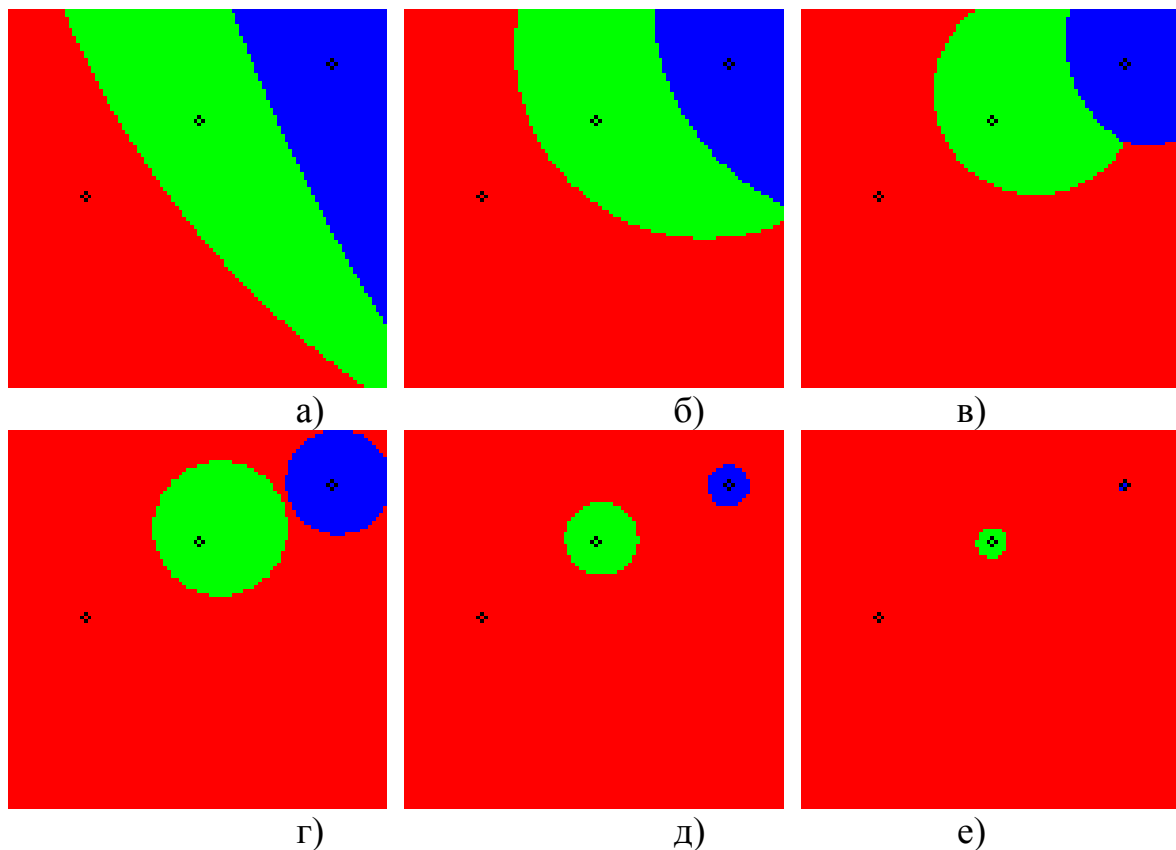


Рис.1 Результати розбиття множини Ω , що має форму квадрата зі стороною 1, на три підмножини з центрами $\tau_1(0.2;0.5)$, $\tau_2(0.5;0.7)$, $\tau_3(0.85;0.85)$, $\Delta x = \Delta y = 0.01$, $A_1 = A_{22} = A_{33} = 1.0$, $d_1 = 1.0$, $d_2 = 2.0$, $d_3 = 3.0$ та а) $T = 0.5$, $F = 0.308$, б) $T = 1.0$, $F = 0.919$, в) $T = 1.5$, $F = 1.985$, г) $T = 2.0$, $F = 3.723$, д) $T = 3.0$, $F = 10.038$, е) $T = 5.0$, $F = 48.889$

Модельна задача 2.

Вхідні данні та постановка тотожні модельній задачі 1, аналогічно розглядається розбиття області проте на більшу кількість підмножин. Чотири центри нерівномірно розміщені по області $\tau_1(0.3;0.8)$, $\tau_2(0.1;0.9)$, $\tau_3(0.4;0.2)$, $\tau_4(0.5;0.6)$, та задані параметри швидкості зростання вартості транспортування $d_1 = 1.0$, $d_2 = 2.0$, $d_3 = 3.0$, $d_4 = 4.0$ суттєвим чином відрізняється між центрами виробництва. В результаті чисельного

експерименту отримано розбиття (Рис.2 а-е). Можемо бачити, що при $T \in [0,1]$ суттєва перевага між центрами відсутня, але при $T \rightarrow 5$ область майже повністю складається з підмножини Ω_1 , що обумовлено значно нижчою ціною у транспортування одиниці товару.

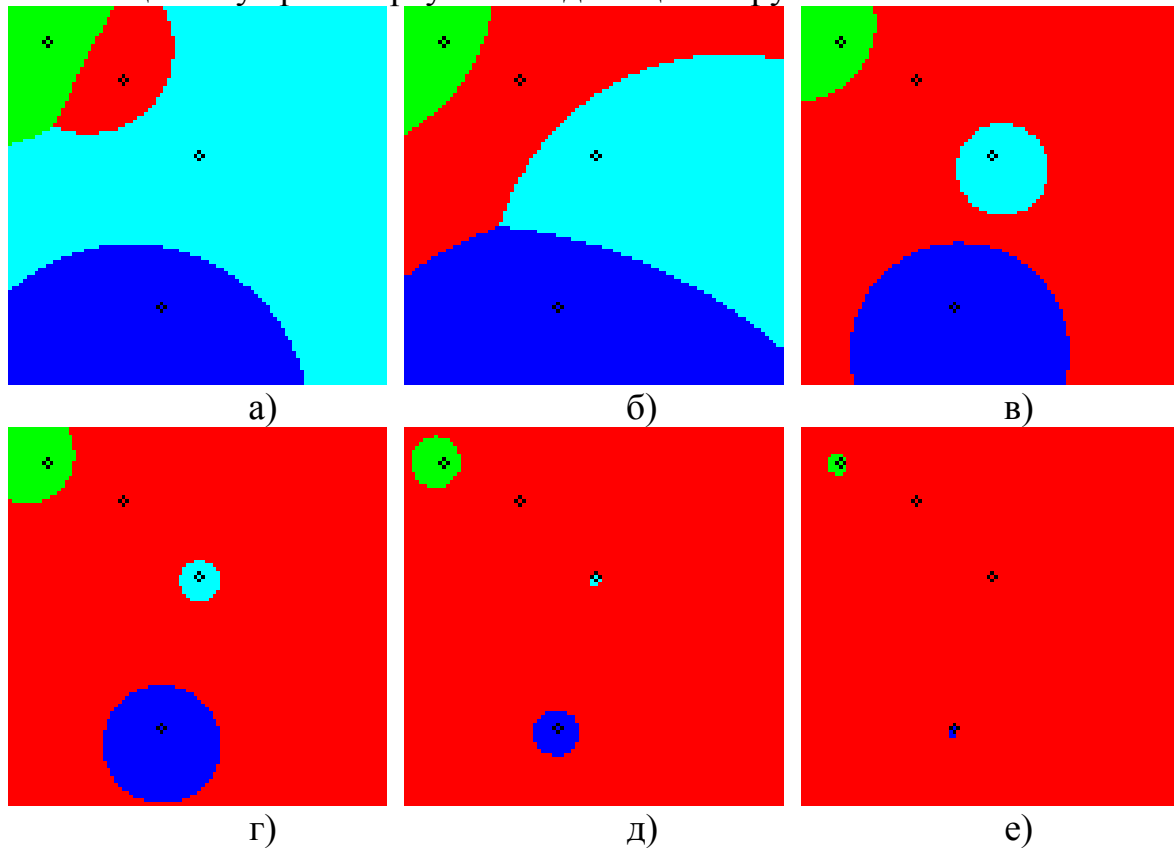


Рис.2 Результати розбиття множини Ω , що має форму квадрата зі стороною 1, на чотири підмножини з центрами $\tau_1(0.3;0.8)$, $\tau_2(0.1;0.9)$, $\tau_3(0.4;0.2)$, $\tau_4(0.5;0.6)$, $\Delta x = \Delta y = 0.01$, $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 1.0$, $d_1 = 1.0$, $d_2 = 2.0$, $d_3 = 3.0$, $d_4 = 4.0$ та а) $T = 0.5$, $F = 0.459$, б) $T = 1.0$, $F = 2.254$, в) $T = 1.5$, $F = 5.789$, г) $T = 2.0$, $F = 10.832$, д) $T = 3.0$, $F = 28.821$, е) $T = 5.0$, $F = 139.731$

Висновки. В роботі сформульована та розв'язана неперервна однопродуктова динамічна задача оптимального розбиття множин з E_n без обмежень з заданим положенням центрів. Здійснено огляд існуючих підходів, методів та алгоритмів до вирішення задач такого класу. Розглянуто математичні моделі, що можуть бути покладені в основу правил зміни вартості перевезення, кожній з яких подане прикладне обґрунтування. Серед чотирьох моделей (інфляції/дефляції, одно- та двосторонньої цінової регуляції а також дотаційної односторонньої цінової регуляції), що можуть бути покладені в основу, було використано найпростішу модель інфляції/дефляції. На її основі було побудовано та розв'язано дві модельні задачі, для яких знайдено рішення системи диференціальних рівнянь, розв'язок яких був використаний як значення вартості транспортування на різних часових проміжках.

Розбиття здійснювалось з кількістю центрів рівний трьом та чотирьом відповідно, з несиметричним їх розташуванням. Результати чисельного експерименту мають достатньо чітке прикладне значення та їм подано прикладну інтерпретацію. В результаті можна відзначити високу ступінь адекватності запропонованої моделі.

Подальші дослідження у цьому питанні можуть бути, зокрема, присвячені аналогічним дослідженням з іншими моделями у якості базових, модифікація моделі до задач з розміщенням центрів та обмеженнями на пропускну спроможність.

Література

1. Kiseleva E.M. The emergence and formation of the theory of optimal set partitioning for sets of the n-dimensional Euclidean space. Theory and application. *Journal of Automation*. 2018. Vol. 50, No. 9. URL: <https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v50.i9.10>.
2. Кисельова О.М. Становлення та розвиток теорії оптимального розбиття множин. Теоретичні і практичні застосування: монографія. Дніпро : Ліра, 2018. 532 с.
3. Kiseleva E.M., Koriashkina L.S., Shevchenko T.A. Solving the dynamic optimal set partitioning problem with arrangement of centers of subsets. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2014. Vol. 50, No. 6. P. 842–853. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-014-9675-8>.
4. Kiseleva E., Prytomanova O., Hart L. Solving a two-stage continuous-discrete problem of optimal partitioning-allocation with the subsets centers placement. *Open Computer Science*, 2020. Vol. 10. Pp. 124–136. DOI: <https://www.degruyter.com/view/journals/comp/10/1/article-p124.xml>.
5. Kiseleva E.M., Shor N.Z. Continuous problems of optimal set partitioning: theory, algorithms, applications. Kyiv : Naukova Dumka, 2005. 564 p.
6. Kiseleva E.M., Prytomanova O.M. Solving a two-stage continuous-discrete optimal partitioning-distribution problem with a given position of the subsets centers. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2020. Vol. 56, No. 1. Pp. 3–15. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-020-00215-y>.
7. Kiseleva E.M. Solution of the problem of optimal partitioning including allocation of the centers of gravity of the subsets. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1989. Vol. 29, No. 3. Pp. 47–56. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(89\)90146-8](https://doi.org/10.1016/0041-5553(89)90146-8).
8. Kiseleva E., Hart L., Prytomanova O., Kuzenkov O. An algorithm to construct generalized Voronoi diagrams with fuzzy parameters based on the theory of optimal partitioning and neuro-fuzzy technologies // Workshop Proceedings of the 8th International Conference on “Mathematics. Information Technologies. Education” (MoMLeT&DS-2019), Shatsk, Ukraine, June 2–4, 2019. P. 148–162. ISSN 1613-0073. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2386/paper12.pdf>.
9. Buttazzo G., DalMaso G. An existence result for a class of shape

- optimization problems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1993. Vol. 122, No. 3. Pp. 183–195. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00411477>
10. Caffarelli L.A., Lin F.-H. An optimal partition problem for eigenvalues. *Journal of Scientific Computing*. 2007. Vol. 31, No. 1–2. Pp. 5–18. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10915-006-9114-8>.
 11. Conti M., Terracini S., Verzini G. On a class of optimal partition problems related to the Fučík spectrum and to the monotonicity formulae. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*. 2005. Vol. 22, No. 1. Pp. 45–72. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00526-004-0266-9>.
 12. Burger M., Hackl B., Ring W. Incorporating topological derivatives into level set methods. *Journal of Computational Physics*. 2004. Vol. 194, No. 1. Pp. 344–362. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.09.033>.
 13. Amstutz S., Novotny A.A. Topological optimization of structures subject to von Mises stress constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2010. Vol. 41, No. 3. Pp. 407–420. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00158-009-0425-x>.
 14. Rockafellar R.T. *Convex Analysis*. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 1973. Vol. 18, No. 4. DOI: 10.1017/S0013091500010142.
 15. Dumas A., Santambrogio F. Optimal trajectories in L1 and under L1 penalizations. *Comptes Rendus. Mathématique*. 2024. Vol. 362, No. G6. P. 657–692.

ON THE DYNAMIC PROBLEM OF OPTIMAL SET PARTITIONING WITH FIXED CENTERS

Sergiy Yakovlev, Elena Kiseleva, Ludmila Hart, Oleksandr Kuzenkov,
Danil Zakutnii,

The article formulates and investigates a dynamic optimal set partitioning (OSP) problem with fixed centers, which belongs to the class of spatial distribution problems with dynamically changing parameters. A formal problem statement, solution algorithm, and results of a numerical experiment confirming the efficiency and accuracy of the proposed approach are presented. The relevance of the selected topic is driven by the wide applicability of optimal partitioning problems in dynamic formulations for solving applied tasks in logistics, resource management, service area planning, and other domains where cost depends on time. Unlike static model problems, in real-world conditions, the transportation cost between elements may vary over time, significantly affecting both the search for the optimal solution and the value of the objective functional. The study considers several transportation cost models, including linear, exponential, and random (stochastic), enabling improved adaptation of models to specific applied contexts.

To conduct the numerical experiment, specialized software was developed in Python, integrating modern numerical methods such as step-by-step optimization, modified gradient approaches, and graphical result analysis tools. The model is based on the classical formulation of the optimal partitioning problem with fixed centers but introduces temporal dependencies into cost coefficients, allowing the simulation of complex distribution scenarios with time as a factor. A comparative analysis of modeling results for both dynamic and static approaches was carried out, demonstrating the advantages of the dynamic formulation: higher accuracy, greater flexibility, and adaptability to changing problem conditions.

The computations were performed on a personal computer with the following configuration: Intel Core i7-12700K, 8 cores, 3.6 GHz; 32 GB DDR4 RAM; 2 TB SSD. The obtained results confirmed not only the effectiveness of the mathematical model but also the correctness of the implemented algorithms, additionally illustrated through graphical phase trajectories and visualizations of the resulting partitions.

Keywords: dynamic problem, optimal set partitioning, objective functional, phase trajectory, numerical methods, time dependence, Python.

Reference

1. Kiseleva E.M. (2018). The emergence and formation of the theory of optimal set partitioning for sets of the n-dimensional Euclidean space. Theory and application. *Journal of Automation*. 50(9). Retrieved from: <https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v50.i9.10>.
2. Kyseleva O.M. (2018). Formation and development of the theory of optimal partitioning of sets. *Teoretychni i praktychni zastosuvannia: monohrafiia*. Dnipro : Lira. [in Ukrainian]
3. Kiseleva E.M., Koriashkina L.S., Shevchenko T.A. (2014). Solving the dynamic optimal set partitioning problem with arrangement of centers of subsets. *Cybernetics and Systems Analysis*, 50(6). 842–853. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-014-9675-8>.
4. Kiseleva E., Prytomanova O., Hart L. (2020). Solving a two-stage continuous-discrete problem of optimal partitioning-allocation with the subsets centers placement. *Open Computer Science*. 10. 124–136. DOI: <https://www.degruyter.com/view/journals/comp/10/1/article-p124.xml>.
5. Kiseleva E.M., Shor N.Z. (2005). Continuous problems of optimal set partitioning: theory, algorithms, applications. Kyiv : Naukova Dumka.
6. Kiseleva E.M., Prytomanova O.M. (2020). Solving a two-stage continuous-discrete optimal partitioning-distribution problem with a given position of the subsets centers. *Cybernetics and Systems Analysis*. 56(1). 3–15. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-020-00215-y>.
7. Kiseleva E.M. 1989. Solution of the problem of optimal partitioning

- including allocation of the centers of gravity of the subsets. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 29(3). 47–56. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(89\)90146-8](https://doi.org/10.1016/0041-5553(89)90146-8).
8. Kiseleva E., Hart L., Prytomanova O., Kuzenkov O. (2019). An algorithm to construct generalized Voronoi diagrams with fuzzy parameters based on the theory of optimal partitioning and neuro-fuzzy technologies // Workshop Proceedings of the 8th International Conference on “Mathematics. Information Technologies. Education” (MoMLeT&DS-2019), Shatsk, Ukraine. 148–162. ISSN 1613-0073. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2386/paper12.pdf>.
 9. Buttazzo G., Dal Maso G. (1993). An existence result for a class of shape optimization problems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 122(3). 183–195. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00411477>
 10. Caffarelli L.A., Lin F.-H. (2007). An optimal partition problem for eigenvalues. *Journal of Scientific Computing*. 31(1–2). 5–18. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10915-006-9114-8>.
 11. Conti M., Terracini S., Verzini G. (2005). On a class of optimal partition problems related to the Fučík spectrum and to the monotonicity formulae. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*. 22(1). 45–72. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00526-004-0266-9>.
 12. Burger M., Hackl B., Ring W. (2004). Incorporating topological derivatives into level set methods. *Journal of Computational Physics*. 194(1). 344–362. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.09.033>.
 13. Amstutz S., Novotny A.A. (2010). Topological optimization of structures subject to von Mises stress constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 41(3). 407–420. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00158-009-0425-x>.
 14. Rockafellar R.T. *Convex Analysis*. (1973). Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 18(4). DOI: 10.1017/S0013091500010142.
 15. Dumas A., Santambrogio F. (2024). Optimal trajectories in L1 and under L1 penalizations. *Comptes Rendus. Mathématique*. 362(G6). 657–692.