

УДК 514.18

ОГЛЯД МЕТОДІВ ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ

Геращенко А.Ю., аспірант*,
2844604@gmail.com, ORCID: 0009-0006-6803-3329

Спірінцев Д.В., канд. техн. наук,
spiritsev@gmail.com, ORCID: 0000-0001-5728-6626

Сюсюкан Ю.М.,
syusyukan@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5539-2449

*Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана
Хмельницького (Україна)*

Стаття присвячена всебічному аналізу методів геометричного моделювання поверхонь, які становлять фундамент сучасного цифрового проектування, інженерного аналізу та комп'ютерної графіки. Основну увагу зосереджено на порівнянні неперервних і дискретних підходів до опису геометричних форм, їхніх теоретичних засад, переваг, недоліків та сфер ефективного застосування. Розглянуто класичні неперервні методи, до яких належать B-сплайни, NURBS, кубічні та бікубічні інтерполяційні функції, а також радіальні базисні функції. Показано, що такі підходи забезпечують високу гладкість (до C2-неперервності), точність аналітичного опису та ефективність при моделюванні стандартних і складних поверхонь. Увагу приділено аналізу математичних властивостей неперервних моделей, особливостям побудови функціональної залежності між контрольними точками, ваговими коефіцієнтами та геометрією об'єкта. Водночас окреслено основні обмеження: висока складність локального редагування, неможливість ефективної роботи з розривами та топологічними особливостями, значне обчислювальне навантаження у випадку густих сіток або великої кількості вхідних даних.

Особливе місце у дослідженні займає огляд дискретних методів моделювання, що базуються на полігональних сітках, композиційному підході, адаптивній дискретизації та ізотропній геометрії. Наведено приклади застосування дискретних моделей у практиці інженерного дизайну, візуалізації, цифрового прототипування, реконструкції поверхонь за хмарами точок та світлотехнічного моделювання. Розглянуто внесок українських дослідників у розвиток напрямку (Найдиш, Пугачов, Ботвіновська, Аушева), зокрема щодо створення гібридних моделей, де поєднано переваги неперервного й дискретного підходів. У підсумку показано, що дискретні методи, завдяки своїй гнучкості, локальності, обчислювальній ефективності та простоті реалізації, є перспективним

* Науковий керівник – канд. техн. наук, доцент Спірінцев Д.В.

інструментом для розв'язання сучасних задач геометричного моделювання, особливо у високодинамічних середовищах, що вимагають змінного рівня деталізації та обробки великої кількості структурованих і неструктурованих даних.

Ключові слова: геометричне моделювання, неперервні методи, дискретні методи, комп'ютерна графіка.

Постановка проблеми. У сучасній науці геометричне моделювання поверхонь посідає одне з провідних місць у прикладній математиці, комп'ютерному моделюванні, цифровому дизайні, інженерії та науках про матеріали. Цей напрям забезпечує побудову математичних моделей для опису складних об'єктів реального світу — від аеродинамічних обтічників і біомедичних імплантатів до архітектурних форм і поверхонь у комп'ютерних іграх. Головними вимогами до таких моделей є гладкість, безперервність, керованість формою, точність та можливість адаптації до різноманітних умов і вхідних даних. Однак на практиці, особливо в умовах складних геометричних форм, локальних особливостей або великої кількості даних, виникає потреба у виборі ефективного методу моделювання, що забезпечить необхідний баланс між точністю, гнучкістю та обчислювальною ефективністю.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Упродовж останніх десятиліть сформувався широкий спектр методів геометричного моделювання поверхонь, які класифікуються за типом представлення, функціональними можливостями та обчислювальними характеристиками. До найвідоміших неперервних підходів належать B-сплайни та NURBS, що були ґрунтовно досліджені у класичних роботах Piegl та Tiller [4], а також у підручниках Press et al. [5] і Kahaner et al. [6]. Ці методи демонструють високу точність і гладкість, зокрема завдяки поліноміальним апроксимаціям і спеціальним механізмам керування формою. В українській науковій школі значну увагу методам геометричного моделювання приділяли Ботвиновська [10] О.Ю., Пугачов [9] Г.В., Найдиш В.М. [1], Аушева Н.М. [3], зокрема в контексті адаптивного дискретного моделювання, композиційних методів і моделювання мінімальних поверхонь. Важливим кроком у розвитку тематики стало поєднання дискретного й аналітичного опису геометрії, що знайшло відображення у сучасних гібридних підходах.

Формулювання цілей статті. Метою цієї статті є здійснення порівняльного аналізу неперервних і дискретних методів геометричного моделювання поверхонь, з'ясування їхніх переваг, обмежень та сфер найефективнішого застосування. Особливу увагу приділено виявленню потенціалу дискретних методів для розв'язання прикладних задач цифрового моделювання, де необхідна гнучкість у локальному керуванні формою, простота алгоритмів та ефективність реалізації в комп'ютерних системах.

Основна частина. Неперервні методи геометричного моделювання лежать в основі численних комп'ютеризованих систем проектування, аналізу та візуалізації. Вони використовуються для точного опису кривих і поверхонь у вигляді аналітичних або параметричних функцій. До ключових представників цього підходу належать сплайни, зокрема B-сплайни, NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines), а також методи, що базуються на радіальних базисних функціях (RBF).

B-сплайни є базовими елементами у моделюванні гладких кривих і поверхонь. Вони дозволяють задавати складні геометричні форми шляхом лінійної комбінації локальних базисних функцій. Кожен сегмент кривої залежить лише від обмеженого числа контрольних точок, що дає змогу здійснювати локальне редагування без впливу на всю геометрію [4]. При цьому досягається висока гладкість (C2-неперервність), що є особливо важливою в задачах інженерного проектування.

NURBS, як узагальнення B-сплайнів, є найпоширенішим форматом опису геометрії у промислових CAD/CAM-системах. Використання вагових коефіцієнтів для кожної точки надає гнучкість у формуванні кривих і поверхонь, дозволяючи точно моделювати як стандартні фігури (кола, еліпси), так і довільні форми [4]. Більшість сучасних програм (SolidWorks, CATIA, Rhino) реалізують саме NURBS як базовий механізм побудови геометрії.

До ще одного важливого класу неперервних методів належать кубічні та бікубічні інтерполяційні сплайни, які дозволяють зберігати гладкість до другого порядку та широко застосовуються в комп'ютерній графіці, чисельному моделюванні, обробці сигналів [4].

У випадках, коли вихідна геометрія задана у вигляді розсіяних точок, доцільним є використання методів радіальних базисних функцій (RBF). Ці методи використовують функції, що залежать від відстані до контрольних точок, зокрема багаточлени Гауса, полігармонічні функції, функції типу TPS (thin-plate splines). Вони забезпечують гладку інтерполяцію на всій області та часто застосовуються у біомедичних застосуваннях, 3D-скануванні та комп'ютерному зорі [5]. Основним недоліком є висока обчислювальна складність, що зростає зі збільшенням кількості точок.

Також у практиці використовують комбіновані підходи – наприклад, сплайн-апроксимацію на основі контрольних полігонів, побудованих за результатами попереднього аналізу геометрії. У цьому випадку забезпечується баланс між точністю й ефективністю моделювання [2].

Основним переваги та недоліки неперервних методів наведено в таблиці 1. Недоліки неперервних методів полягають у складності локального редагування: зміна однієї контрольної точки може впливати на значну частину поверхні. Крім того, при моделюванні поверхонь з розривами або гострими кутами вони можуть давати паразитні коливання або неточності. Інша проблема – це складність реалізації геометрії з топологічними особливостями, наприклад, з отворами або гілкуваннями,

що потребує складного структурування вхідних даних [1; 3].

Однак, неперервні методи геометричного моделювання формують основу сучасної комп'ютерної графіки та проєктування. Завдяки високій точності, математичній строгості та широкому спектру застосування, вони залишаються незамінними в інженерії, фізичному моделюванні та цифровому виробництві. Попри обмеження, неперервні методи є ключовими в галузях, де важлива висока точність і гладкість — а саме в машинобудуванні, авіації, індустріальному дизайні, медичному моделюванні тощо. Вони чудово підходять для аналітичного подання геометрії, оптимізації форми, аналізу кривизни та візуалізації гладких поверхонь.

Таблиця 1

Методи геометричного моделювання поверхонь

Метод	Переваги	Недоліки
В-сплайни	Гладкість до C^2 ; локальний контроль форми; ефективність у CAD/CAM.	Складне налаштування вузлових векторів; обмежена точність відтворення точних геометричних примітивів.
NURBS	Узагальнення В-сплайнів; підтримка раціональних кривих; гнучкість моделювання.	Складність реалізації; залежність від вагових коефіцієнтів.
Інтерполяційні сплайни (кубічні, бікубічні)	Забезпечують гладкість до C^2 ; придатні для чисельного аналізу.	Можливі осциляції; складне управління формою при великій кількості точок.
RBF (радіальні базисні функції)	Глобальна гладкість; добре працюють з нерівномірно розташованими точками.	Висока обчислювальна складність; схильність до паразитних коливань.
Полігональні сітки	Простота реалізації; придатність до чисельних розрахунків; локальний контроль.	Обмежена гладкість; потреба в згладжуванні при візуалізації.
Композиційне моделювання	Модифікація фрагментів без впливу на всю модель; адаптивність.	Складність управління великою кількістю фрагментів.
Ізотропна геометрія	Опис складних згинань; застосування у біомедичних задачах.	Математична складність; вузька спеціалізація.
Адаптивна дискретизація	Зменшення обчислювальних витрат; покращена локальна точність.	Потребує складного алгоритму контролю щільності.

На відміну від них, дискретні методи оперують поверхнями як сукупностями елементарних фрагментів (трикутників, квадратів). Це дозволяє легко відтворювати локальні особливості, змінювати топологію, модифікувати лише необхідні ділянки.

У працях Найдиша В.М. та його школи розроблено композиційні підходи до побудови складних поверхонь із простих фрагментів. Це дозволяє уникати глобального перерахунку всієї моделі при зміні лише частини.

Дискретні методи знаходять широке застосування в CAD/CAE, геймдеві, віртуальній реальності, де необхідна динамічна зміна рівня деталізації. Вони добре інтегруються з чисельними методами (наприклад, скінченних елементів) і легко візуалізуються.

Серед сучасних напрямів розвитку — створення гібридних моделей, де глобальна форма задається неперервним методом, а деталізація — дискретною сіткою. Також активно розвиваються методи адаптивної дискретизації, які змінюють щільність сітки залежно від кривизни поверхні.

Українські дослідження підтверджують ефективність дискретних методів. Пугачов, Ботвіновська, Аушева застосували їх у практичних задачах світлотехніки, архітектурного моделювання, проєктування медичних імплантів. Їх роботи показують, що дискретні підходи дозволяють досягти балансу між точністю і простотою реалізації.

Загалом, дискретні методи забезпечують більшу адаптивність, локальний контроль, гнучкість і швидкість реалізації, що робить їх незамінними для багатьох сучасних застосувань.

Неперервні методи геометричного моделювання ґрунтуються на описі поверхонь у вигляді параметричних функцій. Серед них основну роль відіграють B-сплайни та NURBS, що дозволяють досягти високої гладкості та точності. B-сплайни використовують базисні функції, які локально впливають на форму поверхні — кожен сегмент залежить від обмеженої кількості контрольних точок, що забезпечує локальний контроль геометрії. При цьому забезпечується C2-неперервність, яка є достатньою для більшості інженерних задач.

NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) — це узагальнення B-сплайнів, що дозволяють задавати як стандартні геометричні примітиви (кола, еліпси), так і довільні контури. Їхня головна перевага полягає у використанні вагових коефіцієнтів, які дозволяють точно контролювати форму. Завдяки цьому NURBS є основою багатьох CAD/CAM-систем, зокрема AutoCAD, SolidWorks, CATIA. Вони забезпечують точну передачу форм у машинобудуванні, авіації, промисловому дизайні.

Серед методів неперервного моделювання важливе місце займають кубічні, бікубічні та бікубічно-раціональні інтерполяційні сплайни. Вони дозволяють досягти C1- або C2-гладкості та широко використовуються в моделюванні згладжених поверхонь у CAE-середовищах. У галузі

скінченно-елементного аналізу вони необхідні для створення коректної геометрії сітки, що визначає точність чисельних розрахунків.

Радіальні базисні функції (RBF), серед яких виділяють багаточленні Гауса, полігармонічні функції та функції типу TPS (thin-plate splines), використовуються переважно для інтерполяції розсіяних даних. Вони забезпечують глобальну гладкість, однак їхнє застосування обмежене через високу обчислювальну складність та чутливість до кількості точок.

Незважаючи на численні переваги, неперервні методи мають суттєві недоліки: складність локального редагування, паразитні коливання при густій сітці вузлів, складність побудови при наявності розривів чи особливих точок на поверхні. Саме тому у випадках моделювання складних або неструктурованих об'єктів все частіше застосовуються дискретні методи.

Дискретні методи моделювання поверхонь базуються на розбитті простору на полігональні елементи — трикутники, чотирикутники, багатокутники. Такий підхід дозволяє явно зберігати топологічну структуру об'єкта, полегшує обчислення, дозволяє контролювати локальні характеристики поверхні.

Роботи В.М. Найдиша та його наукової школи [1; 2] стали основою композиційного моделювання, де складна поверхня задається як комбінація простіших фрагментів. Це дозволяє досягти адаптивності, гнучкості та стабільності. Окремі фрагменти можуть редагуватися без впливу на решту моделі, що значно полегшує проектування у CAD/CAE.

Методи ізотропної геометрії, які застосовувала Аушева Н.М. [3], дозволили створювати дискретні мінімальні поверхні, що описують згинання об'єктів — завдання, майже недоступне для класичних неперервних функцій. Її результати актуальні для біомедичних задач та моделювання оболонкових конструкцій.

Пугачов та Ботвіновська [9; 10] розвинули застосування дискретних підходів у світлотехніці, цифровому прототипуванні, адаптивному дизайні. Вони довели ефективність таких методів для задач з нелінійною або сильно змінною геометрією. У практичних реалізаціях, таких як візуалізація даних лазерного сканування, реконструкція архітектурних пам'яток або об'єктів культурної спадщини, дискретні методи є безальтернативними.

Особливої уваги заслуговують типи сіток, що використовуються у дискретному моделюванні: регулярні, напіврегулярні, адаптивні. Останні дозволяють змінювати щільність розбиття в залежності від локальної кривизни, що підвищує точність і зменшує витрати ресурсів.

Дискретні методи ідеально підходять для чисельного моделювання (метод скінченних елементів), тривимірного рендерингу, геймінгу, віртуальної реальності. Вони забезпечують можливість реалізації динамічного рівня деталізації (LOD), що є ключовим у VR/AR-середовищах.

Таким чином, дискретне моделювання є не лише альтернативою неперервним методам, а й потужним інструментом для інженерії, медицини, мистецтва, де точність, локальність і простота реалізації виходять на перший план.

Висновок. У статті здійснено огляд основних методів безперервного геометричного моделювання кривих, представлених дискретними множинами точок. Незважаючи на глибоку розробленість цих методів, вони не позбавлені недоліків — зокрема, коливань, недостатньої локальності та складності корекції форми без впливу на інші ділянки. Методи, що забезпечують більший контроль, зазвичай мають багато параметрів, що ускладнює модель і знижує її точність. Крім того, жорстка прив'язаність до визначених функціональних класів обмежує гнучкість при відображенні складних геометрій.

На відміну від цього, дискретні методи інтерполяції забезпечують стабільність, точну локальну корекцію, відсутність коливань і простоту реалізації, що робить їх перспективними для подальшого розвитку в задачах моделювання.

Література

1. Найдиш В. М., Верещага В. М. Основи прикладної дискретної геометрії: навч. посіб. Мелітополь : ТДАТУ, 2007. 194 с.
2. Верещага В. М., Найдиш А. В., Адоньєв Є. О., Лисенко К. Ю. Основи композиційного геометричного моделювання: навч. посіб. Мелітополь : ФОП Однорог Т. В., 2019. 255 с.
3. Аушева Н. М. Згинання мінімальних поверхонь в комплексному просторі з точки зору ізотропної геометрії. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2012. Вип. 90. С. 15–19.
4. Piegl L., Tiller W. The NURBS book. 2nd ed. Berlin : Springer, 1997. 646 p.
5. Buhmann M.D., Dyn N. Radial basis function interpolation. Cambridge : Cambridge University Press, 2005. 319 p.
6. Pugachov M.A. Numerical methods of discrete modeling for adaptive lighting design. *Lighting Engineering*. 2020. Vol. 28, No. 4. P. 44–50.
7. Ботвіновська О. М. Дискретне моделювання для цифрового прототипування. *Вісник НТУУ «КПІ»*. Серія: Машинобудування. 2021. № 82. С. 21–26.

REVIEW OF SURFACE GEOMETRIC MODELING METHODS

Anatoly Herashchenko, Dmytro Spirintsev, Yuri Syusyukan

The article presents a comprehensive analysis of surface geometric modeling methods, which form the foundation of modern digital design, engineering analysis, and computer graphics. Particular attention is given to the comparison of continuous and discrete approaches to the representation of

geometric forms, their theoretical foundations, advantages, limitations, and areas of effective application. Classical continuous methods are considered, including B-splines, NURBS, cubic and bicubic interpolation functions, as well as radial basis functions. These approaches provide high smoothness (up to C^2 continuity), analytical accuracy, and efficiency in modeling both standard and complex surfaces. The study analyzes the mathematical properties of continuous models, the specifics of constructing functional dependencies between control points, weight coefficients, and object geometry. At the same time, key limitations are outlined: difficulty of local editing, inefficiency in handling discontinuities and topological features, and significant computational load when processing dense meshes or large data sets.

A special focus is placed on the review of discrete modeling methods based on polygonal meshes, compositional approaches, adaptive discretization, and isotropic geometry. Examples of practical applications of discrete models in engineering design, visualization, digital prototyping, surface reconstruction from point clouds, and lighting design are provided. The contribution of Ukrainian researchers (Naidish, Pugachov, Botvinovska, Ausheva) is highlighted, particularly in the development of hybrid models that combine the strengths of continuous and discrete methods. The findings demonstrate that discrete methods, due to their flexibility, locality, computational efficiency, and implementation simplicity, are a promising tool for solving modern surface modeling problems—especially in high-dynamic environments requiring variable levels of detail and processing of large volumes of structured and unstructured data.

Keywords: geometric modeling, continuous methods, discrete methods, computer graphics.

References

1. Naydysh V. M., Vereshchaga V. M. (2007). *Fundamentals of Applied Discrete Geometry*: navch. posib. Melitopol : TDATU. [in Ukrainian]
2. Vereshchaga V. M., Naydysh A. V., Adoniev E. O., Lysenko K. Yu. (2019). *Fundamentals of composite geometric modeling*: navch. posib. Melitopol : FOP Odnoroh T. V. [in Ukrainian]
3. Ausheva N. M. (2012). Bending of minimal surfaces in complex space from the point of view of isotropic geometry. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. Vol. 90. 15–19. [in Ukrainian]
4. Piegl L., Tiller W. (1997). *The NURBS book*. 2nd ed. Berlin : Springer.
5. Buhmann M.D., Dyn N. (2005). *Radial basis function interpolation*. Cambridge : Cambridge University Press.
6. Pugachov M.A. (2020). Numerical methods of discrete modeling for adaptive lighting design. *Lighting Engineering*. 28(4). 44–50.
7. Botvinovska O. M. (2021). Discrete modeling for digital prototyping. *Visnyk NTUU «KPI»*. Serii: Mashynobuduvannia. 82. 21–26. [in Ukrainian]