

УДК 514.18

КОНСТРУЮВАННЯ КРИВИХ ЛІНІЙ І ПОВЕРХОНЬ З ДОПОМОГОЮ ТРИГРАННИКА ДАРБУ

Несвідомін А.В., канд. техн. наук,

a.nesvidomin@gmail.com, ORCID: 0000-0002-9227-4652

Пилипака С.Ф., д-р. техн. наук,

psf55@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1496-4615

Національний університет біоресурсів і природокористування України
(м. Київ, Україна)

У диференціальній геометрії широко відомим є тригранник Френе, який є супровідним для просторової і як частковий випадок, для плоскої кривої. Три його взаємно перпендикулярні одиничні орти визначаються однозначно для будь-якої точки кривої за винятком деяких особливих. Наприклад, для точки перегину плоскої кривої або для точки випрямлення просторової кривої напрям головної нормалі стає невизначеним. Тригранник Дарбу стосується поверхні. Два його одиничні орти розташовані в дотичній до поверхні площині, а третій спрямований по нормалі до поверхні. Він теж може бути супровідним для кривої, яка розташована на поверхні. Для цього один із ортів у дотичній до поверхні площині має бути дотичним до кривої. Тоді ці два тригранники мають спільний орт дотичної до кривої, а між іншими двома ортами існує певний кут. Однак напрям орта, який спрямований по нормалі до поверхні, можна вибрати в одну або протилежну сторону. Таким чином, на відміну від тригранника Френе, тригранник Дарбу в точці кривої на поверхні може мати два положення.

Тригранники Френе і Дарбу є рухомими і по відношенню до нерухомої системи координат змінюють своє положення за рахунок переміщення і повороту. Для тригранника Френе напрямні косинуси його ортів визначаються через диференціальні характеристики кривої, до яких задіяні перші і другі похідні цієї кривої. У точці кривої з кривиною, рівною нулю, положення ортів головної нормалі і бінормалі стає невизначеним. Для тригранника Дарбу один із ортів спрямований по нормалі до поверхні, тобто його напрям визначається через диференціальні характеристики поверхні і для регулярної поверхні є визначеним. Орт дотичної теж є визначеним, отже і третій орт, перпендикулярний до перших двох, теж буде визначеним. При дослідженні геометричних характеристик кривих та поверхонь з допомогою супровідних тригранників необхідно мати формули переходу від положення елементів цих об'єктів в системі рухомого тригранника до положення в нерухомій декартовій системі координат. Для цього існує дев'ять напрямних косинусів – по три на кожен орт. Для тригранника Френе вони повністю визначаються через

перші і другі похідні параметричних рівнянь напрямної кривої. Для тригранника Дарбу – через параметричні рівняння поверхні. В статті наведено один із можливих способів їх знаходження.

Ключові слова: супровідний тригранник, напрямні косинуси, параметричні рівняння, нормаль до поверхні, векторний добуток.

Постановка проблеми. Тригранник Дарбу деякі автори використовують для аналітичного опису руху матеріальної точки по поверхні під дією прикладених сил [1]. Її переміщення в околі нескінченно малої ділянки поверхні можна розглядати рух по дотичній до поверхні площині, яка відповідає цій ділянці.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Частковий випадок такого руху у площині, коли тригранники Френе і Дарбу збігаються, розглянуто в праці [2]. Роль тригранника Френе при знаходженні положень і швидкостей ланок плоских механізмів розкрито в працях [3, 4].

Задача знаходження траєкторії руху частинки під дією прикладених до неї сил є непростою і зводиться в загальному випадку до розв'язування систем нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку [5, 6]. Застосування тригранника Дарбу дає можливість альтернативного підходу до розв'язування такого роду задач [1]. Якщо крива, вздовж якої рухається тригранник на поверхні, описана у функції довжини власної дуги, то в такому випадку можна застосовувати формули Френе. Конструюванню таких кривих присвячена монографія [7], а також праця [8]. Крива лінія є напрямною для супровідних тригранників. Конструювання кривих за заданими умовами розглянуто в працях [9, 10].

Формулювання цілей статті. Метою статті є конструювання кривих ліній і поверхонь з допомогою тригранника Дарбу.

Основна частина. Постановка задачі. В кожній точці просторової кривої можна побудувати супровідний тригранник Френе $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$. На рис. 1,а дуга AB є плоскою кривою, що належить конічній поверхні. В точці A побудовано тригранники Френе $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ і Дарбу $\bar{T}, \bar{P}, \bar{N}$. Вони мають спільний орт $\bar{\tau} \equiv \bar{T}$ і певний кут φ між двома іншими ортами. Різниця між ними полягає в тому, що тригранник Френе будується без врахування поверхні, на якій розташована крива. Його орт $\bar{\tau}$ спрямований по дотичній до кривої, орт головної нормалі \bar{n} спрямований до центра кривини і орт бінормалі \bar{b} спрямований так, що утворює праву систему трьох взаємно ортогональних векторів. Їх напрям повністю визначається диференціальними характеристиками кривої. В зв'язку із цим положення тригранника Френе в деяких особливих точках кривої стає невизначеним. Наприклад, в точці B (рис. 1,а), яка є точкою перегину і в якій побудовано тригранник Дарбу, положення тригранника Френе є невизначеним, оскільки в цій точці кривина кривої дорівнює нулю і центр її кривини

відсутній. У тригранника Дарбу орт \bar{N} спрямований по нормалі до поверхні, орт \bar{P} визначається із векторного добутку знову ж за умови, що орти утворюють праву систему координат. В результаті того, що орти \bar{T} і \bar{P} перпендикулярні до орта \bar{N} , вони утворюють дотичну площину до поверхні в даній точці. Для розгортної поверхні його напрям може збігатися із прямолінійною твірною (як, наприклад, для конуса на рис. 1,а).

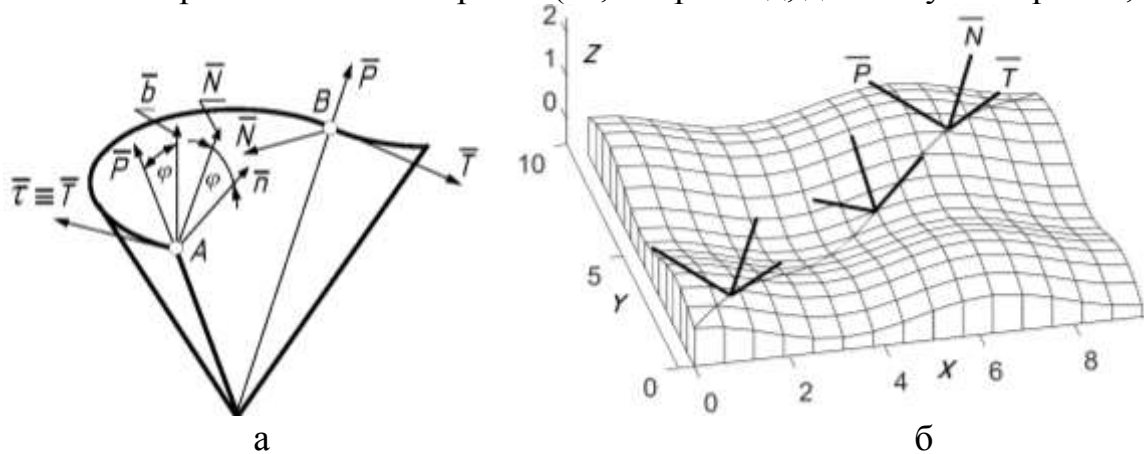


Рис. 1. Графічні ілюстрації до побудови супровідного тригранника Дарбу кривої на поверхні:

а) тригранника Френе і Дарбу плоскої кривої, що належить конічній поверхні;

б) окремі положення тригранника Дарбу кривої на поверхні переносу

Для тригранника Дарбу потрібно вибрати напрям орта \bar{N} , оскільки вектор нормалі до поверхні може бути спрямований як в одну сторону, так і в протилежну. Наприклад, в точці A (рис. 1,а) він спрямований всередину конуса. При переміщенні в точку B його напрям теж спрямований всередину конуса, тобто тригранник Дарбу в точці B є визначеним на відміну від тригранника Френе. Якщо напрям орта \bar{N} поміняти на протилежний, то і напрям орта \bar{P} теж поміняється на протилежний.

Визначення положення тригранника Дарбу через параметри поверхні і кривої лінії на ній. Нехай поверхня буде задана параметричними рівняннями $X=X(u, v)$, $Y=Y(u, v)$, $Z=Z(u, v)$, де u, v – незалежні змінні поверхні. Щоб задати лінію на ній, потрібно змінні u і v зробити залежними одна від одної. Це можна зробити по різному: задати залежність $v=v(u)$, $u=u(v)$, або ж зв'язати їх між собою через третю змінну t : $v=v(t)$, $u=u(t)$. Тоді на поверхні буде описана лінія у функції однієї із цих змінних: u, v або t . Якщо задана залежність $v=v(u)$, то параметричні рівняння лінії запишуться, як $x=x(u, v(u))$, $y=y(u, v(u))$, $z=z(u, v(u))$. Щоб знайти напрям орта дотичної \bar{T} , потрібно отримані рівняння продиференціювати по змінній v і отримані вирази привести до одиничного вектора. Після такої нормалізації чисельне значення кожного

із трьох виразів при конкретному значенні $u=const$ буде рівним косинусу кута, що складає цей орт із осями нерухомої системи координат, тобто це будуть напрямні косинуси орта \bar{T} . Нормаль \bar{N} до поверхні є векторним добутком векторів дотичних до координатних ліній, що задають частинні похідні:

$$\bar{N} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix} = \{Y_u Z_v - Y_v Z_u; -X_u Z_v + X_v Z_u; X_u Y_v - X_v Y_u\}. \quad (1)$$

Змінна з індексом внизу означає частинну похідну по відповідній змінній, наприклад, $X_u = \partial X / \partial u$. Якщо два останні рядки у визначнику (1) поміняти місцями, то вектор \bar{N} змінить свій напрям на протилежний. Щоб вектор \bar{N} став одиничним, тобто ортом, його потрібно нормалізувати. Одержані три проекції одиничного вектора, тобто орта \bar{N} , будуть його напрямними косинусами. Варто мати на увазі, що три отриманих вирази в результаті розкриття визначника (1) можуть бути функціями двох змінних u і v . Підстановка конкретних числових значень цих криволінійних координат дасть напрям орта у відповідній точці поверхні. Нам потрібен орт у точці кривої на поверхні, тому потрібно перейти до однієї змінної, підставивши у вирази проекцій залежність між змінними u і v .

Третій орт \bar{P} знаходиться із векторного добутку ортів \bar{N} і \bar{T} . Для того, щоб орт \bar{P} мав потрібний напрям (тобто щоб тригранник був правим), у двох нижніх рядках визначника (1) вирази проекцій орта \bar{N} мають бути вище, а вирази проекцій орта \bar{T} – нижче. Розкривати такі визначники зручно за допомогою програмних продуктів символічної математики. Якщо орти \bar{N} і \bar{T} були одиничними, то отриманий орт \bar{P} теж буде одиничним, тобто його не потрібно нормалізувати.

Побудова тригранника Дарбу на поверхні в заданій точці кривої на ній. Для прикладу візьмемо поверхню переносу, утворену переміщенням синусоїди по синусоїді у двох взаємно перпендикулярних площинах. Це не призведе до звуження загального рішення, проте дещо спростить вирази. Параметричні рівняння поверхні мають вигляд:

$$X = u; \quad Y = v; \quad Z = a(\sin v + \cos u), \quad (2)$$

де a – стала величина.

Знайдемо напрямні косинуси орта \bar{N} . Частинні похідні рівнянь (2) запишуться:

$$\begin{array}{lll} X_u = 1; & Y_u = 0; & Z_u = -a \sin u; \\ X_v = 0; & Y_v = 1; & Z_v = a \cos v. \end{array} \quad (3)$$

Розкриваємо визначник (1) при підстановці в нього частинних похідних (3):

$$\left\{ a \sin u \quad -a \cos v \quad 1 \right\}. \quad (4)$$

Діленням проєкцій вектора (4) на його модуль, отримаємо напрямні косинуси l, m, n орта \bar{N} :

$$\begin{aligned} l_N &= \frac{a \sin u}{\sqrt{1 + a^2 (\cos^2 v + \sin^2 u)}}; \\ m_N &= -\frac{a \cos v}{\sqrt{1 + a^2 (\cos^2 v + \sin^2 u)}}; \\ n_N &= \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 (\cos^2 v + \sin^2 u)}}. \end{aligned} \quad (5)$$

При встановленій залежності $v=v(u)$ вектор дотичної до кривої на поверхні (1) знайдемо диференціюванням цих рівнянь (тобто уже рівнянь кривої) по змінній u :

$$x' = u; \quad y' = v'; \quad z' = a(v' \cos v - \sin u). \quad (6)$$

Напрямні косинуси орта \bar{T} знаходимо нормуванням його проєкцій (6):

$$\begin{aligned} l_T &= \frac{u}{\sqrt{1 + v'^2 + a^2 (v' \cos v - \sin u)^2}}; \\ m_T &= \frac{v'}{\sqrt{1 + v'^2 + a^2 (v' \cos v - \sin u)^2}}; \\ n_T &= \frac{a(v' \cos v - \sin u)}{\sqrt{1 + v'^2 + a^2 (v' \cos v - \sin u)^2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Напрямні косинуси орта \bar{P} знаходимо векторним множенням ортів \bar{N} (5) і \bar{T} (7):

$$\begin{aligned} l_P &= -\frac{v' + a^2 \cos v (v' \cos v - \sin u)}{\sqrt{[1 + a^2 (\cos^2 v + \sin^2 u)][1 + v'^2 + a^2 (v' \cos v - \sin u)^2]}}; \\ m_P &= \frac{1 - a^2 \sin u (v' \cos v - \sin u)}{\sqrt{[1 + a^2 (\cos^2 v + \sin^2 u)][1 + v'^2 + a^2 (v' \cos v - \sin u)^2]}}; \\ n_P &= \frac{a(\cos v + v' \sin u)}{\sqrt{[1 + a^2 (\cos^2 v + \sin^2 u)][1 + v'^2 + a^2 (v' \cos v - \sin u)^2]}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Напрямні косинуси (5), (7), (8) ортів \bar{N} , \bar{T} , \bar{P} представлені в загальному вигляді при невідомій залежності $v=v(u)$, тобто для незаданої поки що кривої на поверхні (2). Нехай такою залежністю буде найпростіша: $v=u$. Отже $v'=1$. Підстановка $v=u$ у рівняння поверхні (2) дасть лінію на її поверхні, яка проходить по діагоналі через клітини

координатної сітки (рис. 1,б). Підстановка $v=u$ і $v'=1$ у вирази напрямних косинусів (5), (7), (8) робить їх залежними тільки від однієї змінної – u , числове значення якої задає точку на кривій. Наприклад, напрямні косинуси орта \bar{N} після підстановки запишуться:

$$l_N = \frac{a \sin u}{\sqrt{1+a^2}}; \quad m_N = -\frac{a \cos u}{\sqrt{1+a^2}}; \quad n_N = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}. \quad (9)$$

Останній вираз n_N (проекція орта на вісь OZ) є додатним, що свідчить, що орт нормалі до поверхні спрямований вгору. На рис. 1,б побудована поверхня (2) при $a=0,3$ і зміні незалежних змінних в межах $u=0\dots3\pi$, $v=0\dots3\pi$. Орти тригранника Дарбу побудовані при різних значеннях змінної u .

Побудова ліній та поверхонь за допомогою тригранника Дарбу. На рис. 1,б показано три положення тригранника Дарбу на заданій лінії. Таких положень можна побудувати скільки завгодно через заданий інтервал Δu . При неперервній зміні параметра u тригранник Дарбу буде рухатися вздовж кривої. В системі тригранника Дарбу можна задати точку C його координатами: $C\{T_C, P_C, N_C\}$. При русі тригранника Дарбу по кривій нерухома точка C в його системі опише певну лінію по відношенню до нерухомої системи координат $OXYZ$. Існують формули переходу від координат в системі тригранника до координат основної (нерухомої) системи за допомогою напрямних косинусів. Вони мають вигляд:

$$\begin{aligned} x_C &= T_C l_T + P_C l_P + N_C l_N; \\ y_C &= T_C m_T + P_C m_P + N_C m_N; \\ z_C &= T_C n_T + P_C n_P + N_C n_N. \end{aligned} \quad (10)$$

Формули (10) встановлюють відповідність між точкою в триграннику Дарбу і нерухомою системою координат при суміщенні їх вершинах. Щоб отримати координати точки C в заданій точці кривої в нерухомій системі координат, потрібно здійснити паралельне перенесення на величину координат точки кривої в нерухомій системі $OXYZ$. Із врахуванням сказаного при $v=u$ нерухома точка в системі тригранника із координатами $C\{T_C, P_C, N_C\}$ опише траєкторію в нерухомій системі координат згідно параметричних рівнянь:

$$\begin{aligned}
x_C &= T_C \frac{1}{\sqrt{2+a^2-a^2 \sin 2u}} + P_C \frac{1+a^2 \cos u (\cos v - \sin u)}{\sqrt{(1+a^2)(2+a^2-a^2 \sin 2u)}} + \\
&\quad + N_C \frac{a \sin u}{\sqrt{1+a^2}} + u; \\
y_C &= T_C \frac{1}{\sqrt{2+a^2-a^2 \sin 2u}} + P_C \frac{1-a^2 \sin u (\cos u - \sin u)}{\sqrt{(1+a^2)(2+a^2-a^2 \sin 2u)}} - \\
&\quad - N_C \frac{a \cos u}{\sqrt{1+a^2}} + u; \\
z_C &= T_C \frac{a(\cos u - \sin u)}{\sqrt{2+a^2-a^2 \sin 2u}} + P_C \frac{a(\cos v + \sin u)}{\sqrt{(1+a^2)(2+a^2-a^2 \sin 2u)}} + \\
&\quad + N_C \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + a(\sin u + \cos u).
\end{aligned} \tag{11}$$

Точка C може бути рухомою в системі тригранника Дарбу. Нехай вона описує коло радіуса r в площині тригранника, утвореної ортами \bar{T} і \bar{N} з центром, зміщеним на відстань r вздовж орта \bar{N} . Поворот точки кола в площині і рух тригранника Дарбу узгоджені між собою і залежать від змінної u . Параметричні рівняння кола в системі тригранника запишуться:

$$T_C = r \cos \omega u; \quad P_C = 0; \quad N_C = r - r \sin \omega u, \tag{12}$$

де ω – стала, яка впливає на швидкість обертання точки.

Підстановка (12) в (11) дасть параметричні рівняння кривої, яка є результатом додавання двох рухів: переносного руху тригранника по кривій і обертального руху точки в системі тригранника. На рис. 2,а побудовано криву при $r=0,5$ і $\omega=3$. Сталу ω підібрано таким чином, що крива нагадує циклоїду при коченні кола по прямій лінії. У нас кочення відбувається по кривій і сама крива є не плоска, а просторова.

Можна задати обертальний рух точки C в площині тригранника, утвореної ортами \bar{P} і \bar{N} . Тоді параметричні рівняння кола в системі тригранника запишуться:

$$T_C = 0; \quad P_C = r \cos \omega u; \quad N_C = r \sin \omega u. \tag{13}$$

У цьому випадку обертання точки відбувається у нормальній площині тригранника навколо початку координат. В результаті утворюється крива, подібна до гвинтової лінії із криволінійною віссю, якою є задана крива на поверхні. На рис. 2,б побудована крива при $r=1$ і $\omega=15$.

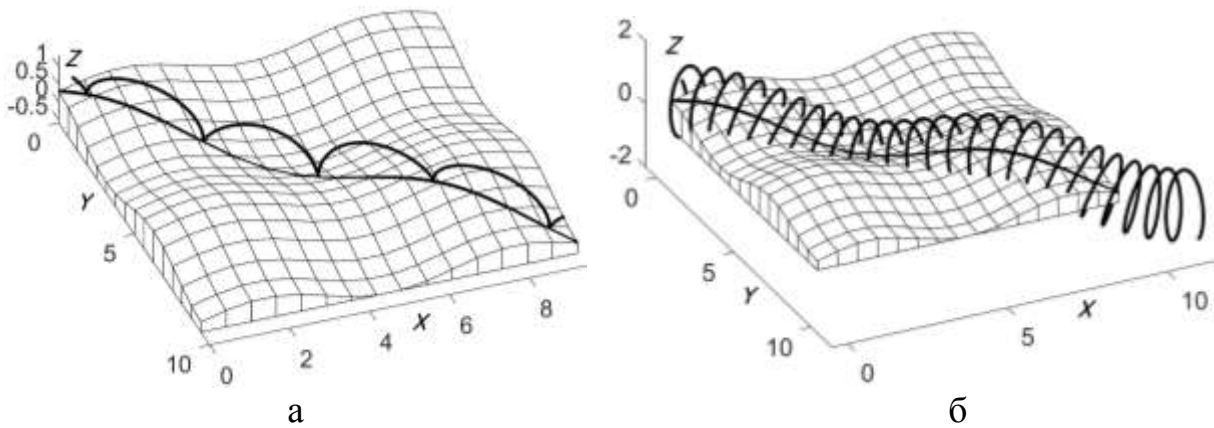


Рис. 2. Просторові криві, як результат додавання руху тригранника Дарбу по заданій кривій на поверхні і обертального руху точки в системі тригранника:

- а) обертання точки відбувається в площині, утвореній ортами \bar{T} і \bar{N} ;
 б) обертання точки відбувається в площині, утвореній ортами \bar{P} і \bar{N}

За допомогою тригранника Френе можна будувати також поверхні. Для цього в його системі потрібно розташувати певну криву. При русі тригранника Дарбу множина положень кривої утворить поверхню. У параметричних рівняннях поверхні присутні дві незалежні змінні. В нашому випадку однією із них є змінна u , яка задає переміщення і орієнтацію тригранника Дарбу. За другу змінну приймемо t , за допомогою якої опишемо твірну криву у системі тригранника. Нехай нею буде коло радіуса r , розташоване у нормальній площині тригранника Дарбу із зміщеним центром на величину радіуса r в напрямі нормалі \bar{N} . Його параметричні рівняння запишуться:

$$T_C = 0; \quad P_C = r \cos t; \quad N_C = r + r \sin t. \quad (14)$$

Щоб коло було замкнене, змінна t повинна змінюватися в межах $t=0 \dots 2\pi$. Підстановкою рівнянь (14) у (11) ми отримаємо параметричні рівняння трубчастої поверхні. На рис. 3,а вона побудована при $r=0,5$. Вісь трубчастої поверхні піднята над поверхнею переносу на величину радіуса r , отже вона торкається до поверхні переносу вздовж заданої на ній лінії внутрішнім рівнянням $v=u$. Можна задати іншу лінію на поверхні переносу, наприклад, за допомогою тригонометричної функції та її похідної:

$$v = b \sin u + c, \quad v' = b \cos u. \quad (15)$$

Якщо підставити із (15) вираз v у (2), то ми отримаємо нову лінію на поверхні переносу. При підстановці виразів (15) у (5), (7) і (8) ми отримаємо напрямні косинуси тригранника Дарбу для нової кривої. Після цього можна будувати як лінії, так і поверхні з допомогою тригранника. На рис. 3,б побудовано трубчасту поверхню, яка торкається лінії на поверхні переносу, заданої рівнянням (15). Для цього було підставлено рівняння (14) у оновлені напрямні косинуси і подальше рівняння поверхні.

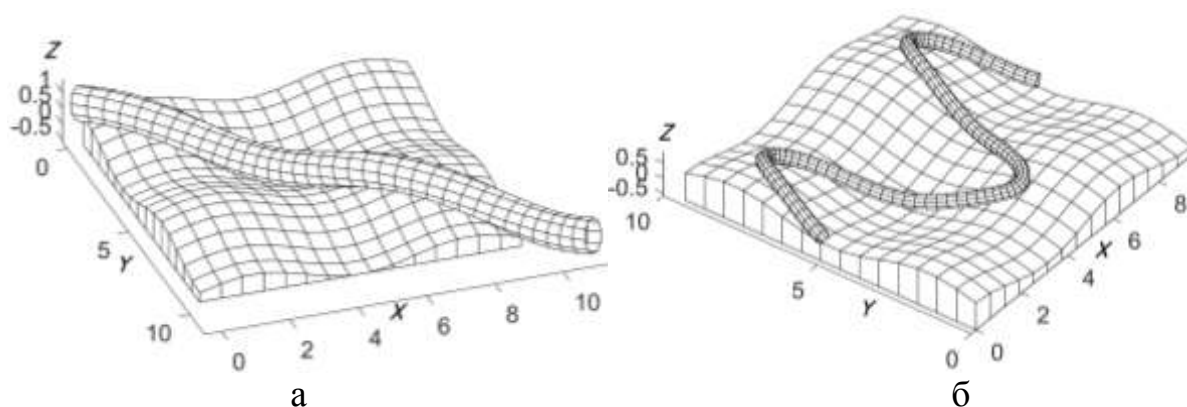


Рис. 3. Трубчасті поверхні, які дотикаються до поверхні переносу вздовж заданих ліній на ній:

- а) лінія на поверхні переносу задана рівнянням $v=u$;
 б) лінія на поверхні переносу задана рівнянням $v=bsinu+c$

Розроблений підхід дозволяє будувати і інші поверхні із твірною кривою змінної форми. Наприклад, в рівняннях (14) можна задати твірне коло змінного радіуса залежністю $r=r(u)$.

Висновки. Лінію на поверхні можна задати різними способами. Один із них – внутрішнім рівнянням, тобто встановленням певної залежності між незалежними змінними поверхні. Можна також задати криву лінію і конструювати поверхню так, щоб вона проходила через цю криву. Якщо рівняння поверхні і кривої на ній відомі через спільну незалежну змінну, то в такому випадку положення тригранника Дарбу в будь-якій точці кривої на поверхні стає визначеним. Напрямні косинуси його ортів визначаються аналітично. При цьому напрям орта нормалі до поверхні може бути заданий в одну або протилежну сторону в залежності від поставленої задачі. Такою задачею може бути задача утворення абсолютної траєкторії точки як суми переносного руху тригранника Дарбу і відносного руху точки в системі самого тригранника. Інша задача – утворення поверхонь, прив'язаних до кривої на поверхні, зокрема, проектування трубопроводу у вигляді трубчастої поверхні, який лежить на заданій поверхні.

Література

1. Несвідомін А.В. Моделювання руху частинки по шорсткій внутрішній поверхні горизонтального циліндра в проекціях на орти локальних систем координат. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. Харків: ХДУХТ, 2011. Вип. 29. С. 23 – 29.
2. Pylypaka S., Volina T., Nesvidomin V., Pavlov A., Dranovska S. The possibility to apply the Frenet trihedron and formulas for the complex movement of a point on a plane with the predefined plane displacement. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2021. Вип. 3 (7-

- 111). С. 45–50. Режим доступу: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/232446/234604>
3. Чепіжний А. В. Визначення положень і швидкостей ланок плоских механізмів з допомогою тригранника Френе. *Сучасні проблеми моделювання*. Зб. наук праць. МДПУ ім. Б. Хмельницького. Мелітополь: МДПУ, 2016. Вип. 7. С. 166 – 171.
 4. Чепіжний А. В., Бабка В. М. Визначення положень ланок плоского механізму за допомогою системи тригранника Френе. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. К.: КНУБА, 2012. Вип. 90. С. 20 – 26.
 5. Кресан Т. А. Рух частинки ґрунту по поверхні розгорнутого гелікоїда з горизонтальною віссю обертання і заданим кутом атаки. *Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research*. Київ, 2021. Vol. 12, No 2. P. 67 - 75.
 6. Воліна Т.М. Дослідження руху частинки по шорсткій поверхні, яка утворена гвинтовим рухом синусоїди, під дією сили власної ваги. *Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research*. Київ, 2020, Vol. 11, No. 3. P. 187-194.
 7. Борисенко В. Д., Устенко С. А., Устенко І. В. Геометричне моделювання кривих ліній і поверхонь у натуральній параметризації: монографія. Миколаїв: МНУ, 2018. 216 с.
 8. Захарова Т. М., Кремець Т. С. Плоскі криві у функції натурального параметра на основі годографа Піфагора. *Сучасні проблеми геометричного моделювання*. Мелітополь, 2017. №8. С. 65 –70.
 9. Кресан Т. А. Конструювання центроїд некруглих коліс на основі деформації еліпса. *Прикладна геометрія, інженерна графіка*. К., 2021. Вип. 100. С. 182 – 194.
 10. Гавриленко Є. А., Холодняк Ю. В., Найдиш А. В. Моделювання одновимірних обводів із забезпеченням заданої точності інтерполяції. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2018. № 3(2). С. 125-129. Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vkhdtu_2018_3%282%29__22.

CONSTRUCTING CURVED LINES AND SURFACES WITH THE HELP OF THE DARBU TRIANGLE

Andriy Nesvidomin, Serhiy Pylypaka

In differential geometry, the Frenet trihedron is widely known, which is a companion for a spatial and, as a partial case, for a plane curve. Its three mutually perpendicular unit orthoses are defined uniquely for any point of the curve, with the exception of some special ones. For example, for the inflection point of a flat curve or for the straightening point of a spatial curve, the direction of the main normal becomes uncertain. The Darboux trihedron refers

to the surface. Two of its single orthos are located in a plane tangential to the surface, and the third is directed along the normal to the surface. It can also be a companion to a curve located on the surface. For this, one of the orthos in the plane tangent to the surface must be tangent to the curve. Then these two trihedra have a common ortho of the tangent to the curve, and there is a certain angle between the other two orthos. However, the direction of the orth, which is directed along the normal to the surface, can be chosen in one or the opposite direction. Thus, unlike the Frenet trihedron, the Darboux trihedron can have two positions at the point of the curve on the surface.

Frenet and Darboux trihedra are movable and change their position in relation to a fixed coordinate system due to movement and rotation. For a Frenet trihedron, the direction cosines of its angles are determined through the differential characteristics of the curve, to which the first and second derivatives of this curve are involved. At the point of the curve with a curvature equal to zero, the position of the orthos of the main normal and the binormal becomes uncertain. For a Darboux trihedron, one of the orthos is directed along the normal to the surface, that is, its direction is determined by the differential characteristics of the surface and is determined for a regular surface. The ortho of the tangent is also defined, therefore the third ortho, perpendicular to the first two, will also be defined. When studying the geometric characteristics of curves and surfaces with the help of accompanying trihedra, it is necessary to have formulas for the transition from the position of the elements of these objects in the moving trihedron system to the position in the stationary Cartesian coordinate system. For this, there are nine direction cosines - three for each ort. For the Frenet trihedron, they are completely determined through the first and second derivatives of the parametric equations of the directional curve. For the Darboux trihedron - through the parametric equations of the surface. The article describes one of the possible ways to find them.

Key words: accompanying trihedron, direction cosines, parametric equations, normal to the surface, vector product.

References

1. Nesvidomin, A. V. (2011). Modeling the motion of a particle along the rough inner surface of a horizontal cylinder in projections onto the orthos of local coordinate systems. *Geometric and computer modeling*, 29, 23 – 29 [in Ukrainian].
2. Pylypaka, S., Volina, T., Nesvidomin, V., Pavlov, A. & Dranovska, S. (2021). The possibility to apply the Frenet trihedron and formulas for the complex movement of a point on a plane with the predefined plane displacement. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 3 (7-111), 45–50. Retrieved from: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/232446/234604>

3. Chepizhnyi, A. V. (2016). Determining the positions and velocities of the links of planar mechanisms using the Frenet trihedron. *Modern modeling problems*. Coll. of labor sciences MDPU named after B. Khmelnytskyi, 7, 166 – 171. [in Ukrainian]
4. Chepizhnyi, A. V. & Babka, V. M. (2012). Determining the positions of the links of a planar mechanism using the Frenet trihedron system. *Applied geometry and engineering graphics*, 90. 20-26. [in Ukrainian]
5. Kresan, T. A. (2021). Movement of a soil particle along the surface of an unfolded helicoid with a horizontal axis of rotation and a given angle of attack. *Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research*. 12 (2), 67 – 75. [in Ukrainian]
6. Volina, T. M. (2020). Study of the movement of a particle on a rough surface, which is formed by the helical movement of a sinusoid, under the influence of the force of its own weight. *Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research*, 11 (3), 187-194. [in Ukrainian]
7. Borysenko, V. D., Ustenko, S. A. & Ustenko, I. V. (2018). *Geometric modeling of curved lines and surfaces in natural parameterization*: monograph. Mykolaiv: MNU. [in Ukrainian]
8. Zakharova, T. M., Kremets, T. S. (2017). Flat curves as a function of a natural parameter based on the Pythagorean hodograph. *Modern problems of geometric modeling*, 8, 65-70. [in Ukrainian]
9. Kresan, T. A. (2021). Construction of centroids of non-circular wheels based on ellipse deformation. *Applied geometry, engineering graphics*, 100, 182 – 194. [in Ukrainian]
10. Gavrylenko, E. A., Kholodnyak, Yu. V. & Naidysh, A. V. (2018). Modeling of one-dimensional contours with the provision of specified interpolation accuracy. *Bulletin of the Kherson National Technical University*, 3(2), 125-129. Retrieved from: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vkhdtu_2018_3%282%29_22 [in Ukrainian]