

ПРИЗНАЧЕННЯ ЦЕНТРІВ КРИВИНИ ІНТЕРПОЛЮЮЧОЇ КРИВОЇ

Тетервак І.Р.,

illia.tetervak@tsatu.edu.ua, ORCID: 0009-0009-0616-8983

Холодняк Ю.В., канд. техн. наук,

yuliya.kholodnyak@tsatu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-8966-9269

Гавриленко Є.А., д-р техн. наук,

yevhen.havrylenko@tsatu.edu.ua, ORCID: 0000-0003-4501-445X

Таврійський державний агротехнологічний університет ім. Дмитра Моторного (м. Запоріжжя, Україна)

У статті запропоновано спосіб призначення вихідних даних для формування еволюти монотонної кривої, яка інтерполює задану послідовність точок.

До завдань, вирішення яких можливо із застосуванням запропонованого способу належить формування графіків, які описують явища або процеси, а також моделювання на основі безлічі вихідних точок лінійчастих каркасів, що задають поверхню. Контроль наявності особливих точок є важливою умовою для якісного вирішення зазначених завдань.

Розв'язання задачі контролю наявності особливих точок у кривої, яка інтерполює заданий точковий ряд, може бути засновано на відмові від аналітичного представлення ділянок кривої. Інтерполююча крива формується у вигляді області можливого розташування її монотонних частин. Основною умовою вирішення задачі є коректне призначення характеристик кривої в вихідних точках. Такими характеристиками є положення нормалей і значення кривини в вихідних точках. Вирішення задачі можливе шляхом формування еволюти монотонної кривої, яка інтерполює заданий точковий ряд.

Задача розв'язується у два етапи. По-перше, у всіх вихідних точках призначається положення нормалей інтерполюючої кривої. По-друге, призначається положення центрів кривини на вже призначених нормалях.

Положення кожної з нормалей призначається в межах області, границі якої визначенні виходячи з заданих властивостей інтерполюючої кривої лінії. Вихідна область можливого розташування кожної нормалі визначається по координатам п'яти послідовних вихідних точок. Ця вихідна область уточнюється враховуючи одночасне призначення положення нормалей в усіх вихідних точках.

Положення кожного центру кривини призначається в межах попередньо визначеного відрізка, який враховує всю область його можливого розташування.

Нормалі, призначені у вихідних точках та відрізки, що з'єднують центри кривини, призначені на цих нормалях обмежують ланцюжок

трикутників. Ця послідовність трикутників є областю можливого розташування еволюти монотонної кривої, яка інтерполює задану послідовність точок. Задача подальшого формування еволюти зводиться до формування її ділянок у вигляді дуг випуклих кривих, які торкаються нормалей у відповідних центрах кривини. Довжина цих дуг повинна дорівнювати різниці значень радіусів кривини у точках, що обмежують відповідну ділянку інтерполюючої кривої.

Призначення положення нормалей та центрів кривини в межах зазначених діапазонів забезпечує можливість формування еволюти, яка задає монотонну регулярну криву лінію, вздовж якої значення кривини змінюються рівномірно і яка інтерполює вихідну послідовність точок.

Ключові слова: інтерполяція, монотонна крива лінія, особливі точки, нормаль, центр кривини, еволюта, радіус кривини.

Постановка проблеми. Інтерполяція послідовності зафіксованих точок є необхідним етапом розв'язання багатьох задач геометричного моделювання. До таких завдань належить формування графіків, які описують явища або процеси, а також моделювання на основі безлічі вихідних точок лінійчастих каркасів, що задають поверхню.

Вихідні дані для дослідження процесів завжди дискретні і можуть бути представлені на графіку послідовністю точок. Інтерполяція вихідних точок дає змогу оцінювати характеристики процесу в будь-який момент часу через координати точок інтерполюючої кривої. Щоб ця оцінка була коректною, конфігурація кривої лінії, що інтерполює, має відповідати конфігурації послідовності вихідних точок.

Зазначена відповідність неможлива без контролю наявності особливих точок у інтерполюючої кривої. Це можуть бути:

- точки зламу, у яких крива лінія має дві дотичні прямі;
- точки перегину, в яких стикаються опуклі та увігнуті частини кривої;
- точки з екстремальним значенням кривизни, де відбувається зміна напрямку зростання значень кривини вздовж кривої;
- точки, в яких порушується регулярність зміни значень кривини вздовж кривої.

Для належного представлення явища або процесу метод інтерполяції має забезпечувати мінімальну за умовами задачі кількість особливих точок у кривої. Це означає, що крива містить особливі точки на тих ділянках, де, зважаючи на конфігурацію послідовності вихідних точок, їхня наявність обов'язкова. Одночасно на ділянках, які можливо інтерполювати монотонною кривою, уздовж якої значення кривини змінюються монотонно і регулярно, особливих точок бути не повинно.

У разі неконтрольованого виникнення особливих точок інтерполююча крива може відхилятися від вихідних точок на неконтрольовану відстань. Отже, відповідні ділянки графіка не будуть із заданою точністю відображати характеристики вихідного явища або

процесу.

Моделювання складних поверхонь засноване на формуванні лінійчастих каркасів. Лінії каркаса часто можуть бути отримані тільки в результаті інтерполяції послідовності точок. Кількість вихідних точок може бути великою, а послідовність точок може мати складну конфігурацію. Так відбувається, коли вихідними даними для створення моделі поверхні слугує масив точок, координати яких отримано в результаті замірів на вже наявному прототипі (реверс - інжиніринг). Іншим прикладом може слугувати формування моделі на основі сітчастого каркаса, коли два сімейства ліній, перетинаючись між собою, визначають безліч точок, які мають бути інтерпольовані.

Складні поверхні, як правило, обмежують виробу, функціональне призначення яких - взаємодія із середовищем. Це поверхні з підвищеними аеро- або гідродинамічними властивостями. Ламінарний характер обтікання таких поверхонь середовищем забезпечують характеристики кривих ліній, що складають каркас поверхні. Мінімальна за умовами задачі кількість особливих точок у ліній, що складають каркас, є основною умовою, яка забезпечує підвищені динамічні властивості поверхні.

Більшість відомих методів інтерполяції вихідних точок засновані на визначенні рівнянь кривих ліній, що проходять через вихідні точки.

Накладання додаткових умов на інтерполюючу криву вимагає збільшення ступеня її рівняння. Такими умовами може бути кількість точок, через які проходить крива, положення дотичних і значення кривини кривої в конкретних точках. Що більше умов накладається на криву, то вищою є ймовірність наявності в неї особливих точок, а контроль їхньої наявності та розташування складніший.

Виникнення суперечності між накладенням на інтерполюючу криву додаткових умов і контролем наявності особливих точок на її ділянках є об'єктивним. В основі протиріччя - аналітичне подання кривої. Рівняння, що задає криву лінію, визначає її конфігурацію, гладкість, закономірність зміни вздовж кривої значень кривини. Якщо ці закономірності не відповідають конфігурації послідовності вихідних точок і призначеним у них характеристикам, то виникнення особливих точок неминуче. Зазначене протиріччя на даний момент не має системного розв'язання.

Інший варіант вирішення задачі засновано на відмові від аналітичного представлення ділянок кривої, яка інтерполює заданий точковий ряд. Інтерполююча крива може бути сформована у вигляді області можливого розташування її монотонних частин. Область можливого розташування кривої формується як послідовність замкнутих контурів, зістикованих між собою у вихідних точках.

Основною умовою вирішення задачі є коректне призначення характеристик кривої в вихідних точках. Такими характеристиками є положення нормалей і значення кривини в вихідних точках. Вирішення задачі можливе шляхом формування еволюти монотонної кривої, яка інтерполює заданий точковий ряд.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботі [2] запропоновано спосіб визначення області можливого розташування центра кривини, який відповідає точці i , що належить монотонній кривій. Монотонною є крива вздовж, якої значення кривини монотонно збільшується чи зменшується.

Область розташування визначена на основі аналізу взаємного розташування стичних, дотичних та прилеглих кіл, що відповідають точці i . Стичне коло ($СК_i$) - торкається до кривої лінії і його радіус величина обернена значенню кривини у відповідній точці кривої [1]. Це коло можна представити, як коло, що проходить через точки: $i, i+1, i-1$, які належать кривій, при умові, що відстань між цими точками є безкінечно малою. В роботі використовується крива, вздовж якої значення кривини монотонно зменшується.

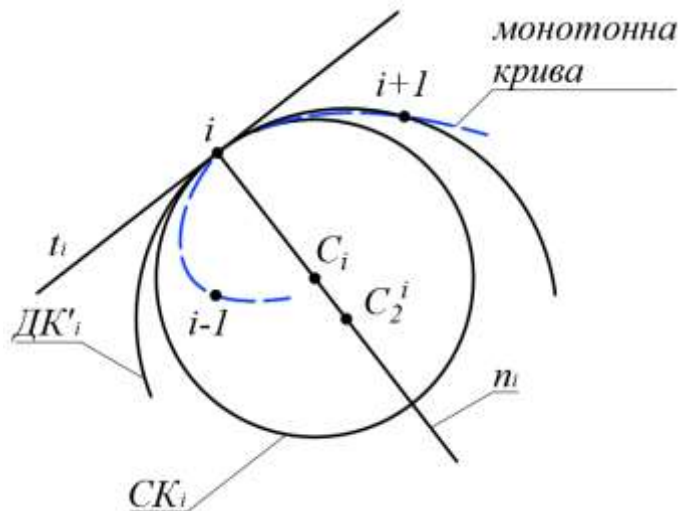


Рис. 1. Розташування стичних та дотичних кіл відносно монотонної кривої

Стичне коло поділяє монотонну криву на дві частини (рис.1). В точках частини кривої, яка розташована всередині $СК_i$ радіуси кривини менші, ніж радіус $СК_i$ (R_i). Відповідно частина, яка розташована за межами $СК_i$, складається із точок в яких радіуси кривини більші за радіус $СК_i$.

Дотичне коло задано проходженням через точку i , дотиком з прямою t_i дотичною до кривої в точці i та проходженням через деяку точку, яка належить кривій. Радіус дотичного кола ($R_{ДК'_i}$), яке проходить через точку $i+1$, що розташована за межами $СК_i$ ($ДК'_i$) більше за радіус $СК_i$. На рисунку центри $СК_i$ та $ДК'_i$ позначені як C_i та C_2^i відповідно.

Дотичне коло $ДК_i$ проходить через точку $i-1$, яка розташована всередині $СК_i$. Радіус $ДК_i$ ($R_{ДК_i}$) менше за R_i .

В результаті аналогічних міркувань відносно послідовності точок $\dots i-1, i, i+1 \dots$ призначених на монотонній кривій, отримано співвідношення величин радіусів кіл:

$$\dots < R_{i-1} < R_{ДК'_{i-1}} < R_{ДК_i} < R_i < R_{ДК'_i} < R_{ДК_{i+1}} < R_{i+1} < \dots \quad (1)$$

Прилегле коло ($ПК_i$)- проходить через три послідовні точки $i-1, i, i+1$ які призначені на кривій (рис.2).

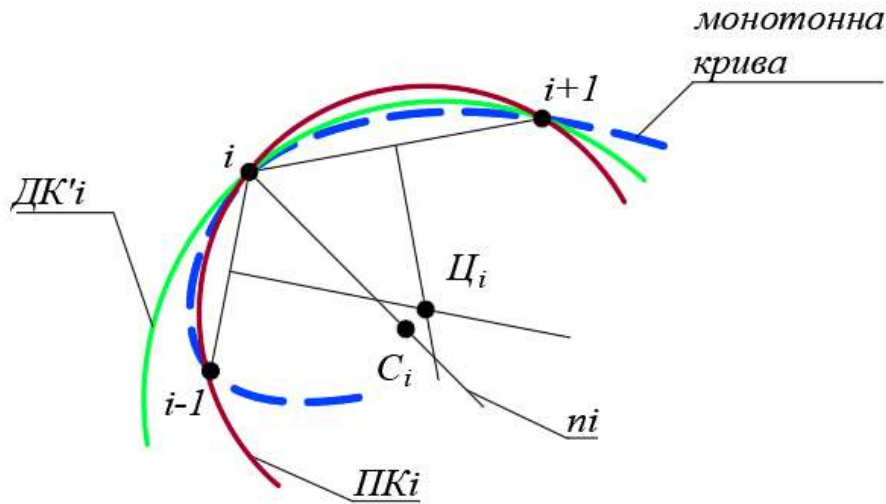


Рис.2. Розташування PK_i відносно монотонної кривої

Визначити співвідношення радіусів PK_i ($R PK_i$) та $ДК'_i$ можна виходячи з того, що обидва кола проходять через точки $i, i+1$. Але при цьому PK_i ще проходить через точку $i-1$, яка знаходиться всередині $ДК'_i$. Відповідно радіус PK_i менше за радіус $ДК'_i$. В результаті аналогічних міркувань відносно послідовності точок $\dots i-1, i, i+1 \dots$, які призначені на кривій можна отримати співвідношення величин радіусів:

$$<R PK_{i-1} < R ДК'_{i-1} < R ДК_i < R PK_i < R ДК'_i < R ДК_{i+1} < R PK_{i+1} < \dots \quad (2)$$

На основі співвідношення (1) та (2) для точки i визначена область можливого розташування центра кривини монотонної кривої, яка інтерполює заданий точковий ряд $\dots i-1, i, i+1 \dots$ (рис. 3).

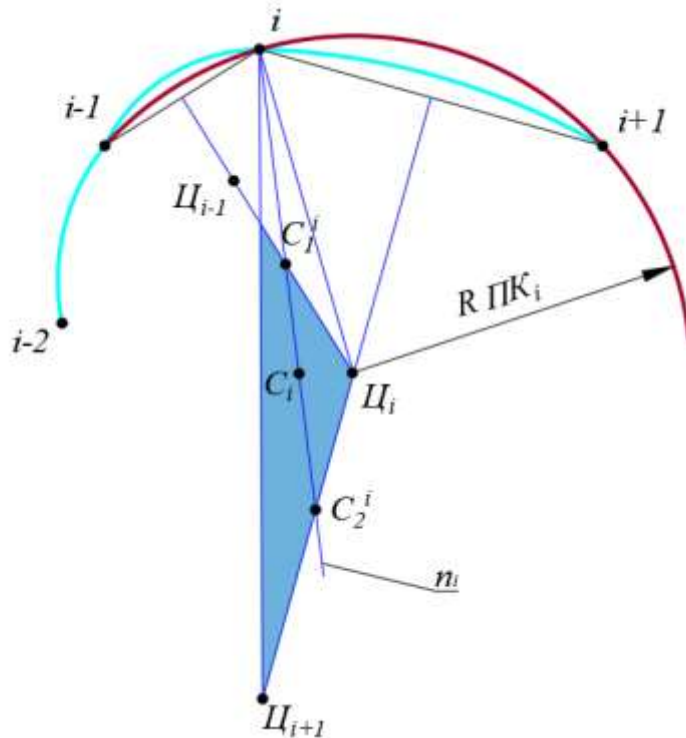


Рис. 3. Область можливого розташування центра кривини C_i

Положення центрів $ПК_{i-1}$, $ПК_i$, $ПК_{i+1}$ (точки $Ц_{i-1}$, $Ц_i$, $Ц_{i+1}$ відповідно) визначає межі можливого розташування нормалі кривої в точці i (n_i). Для виконання (2) нормаль n_i повинна перетинати відрізки $[Ц_{i-1}, Ц_i]$ и $[Ц_i, Ц_{i+1}]$ одночасно. Точки в яких нормаль перетинає ці відрізки – точки C_1^i та C_2^i , є центрами $ДК_i$ та $ДК'_i$ відповідно. Тоді, відповідно (1) відрізок $[C_1^i, C_2^i]$ є діапазоном можливого розташування C_i .

Таким чином, зафарбований на рисунку 3 трикутник є областю можливого розташування C_i .

Область можливого розташування центра кривини C_i , що відповідає точці i визначається виходячи з розташування п'яти послідовних точок $i-2 \dots i+2$.

Вплив положення нормалей, призначених в інших вихідних точках, на область можливого розташування n_i в роботі [2] не розглянуто.

Формулювання цілей статті. Запропонувати спосіб формування області можливого розташування еволюти монотонної інтерполюючої кривої у вигляді послідовності центрів кривини, які відповідають вихідним точкам.

Основна частина. Для досягнення мети статті необхідно виконати дві задачі:

1. Запропонувати спосіб одночасного призначення нормалей в усіх вихідних точках при, якому задача формування еволюти монотонної інтерполюючої кривої має розв'язок.
2. Запропонувати спосіб призначення центрів кривини інтерполюючої кривої на вже призначених нормалях.

Розв'язання зазначених задач розглянемо на прикладі послідовності точок $\dots i-1, i, i+1 \dots$, які можливо інтерполювати кривою, вздовж якої значення кривини монотонно зменшуються. Відповідно (2) розташування зазначених точок повинно забезпечувати виконання умови:

$$\dots < R_{ПК_{i-1}} < R_{ПК_i} < R_{ПК_{i+1}} < \dots$$

Положення центрів кривини визначається на відповідних нормалях виходячи з властивостей еволюти монотонної кривої лінії [1]:

- еволюта є випуклою лінією, яка не має точок перегину та точок повернення;

- нормалі кривої лінії є дотичними її еволюти в відповідних центрах кривини;

- довжина будь-якої ділянки еволюти дорівнює різниці значення радіусів кривини у точках, що обмежують відповідну ділянку вихідної кривої.

Обмеження на взаємне розташування нормалей монотонної інтерполюючої кривої, які призначаються у вихідних точках, розглянемо на прикладі нормалей n_i та n_{i+1} .

Відповідно (2), взаємне розташування нормалей n_i та n_{i+1} повинно забезпечити виконання умови (рис.4):

$$|Ц_i, C_2^i| \leq |Ц_i, C_1^{i+1}|.$$

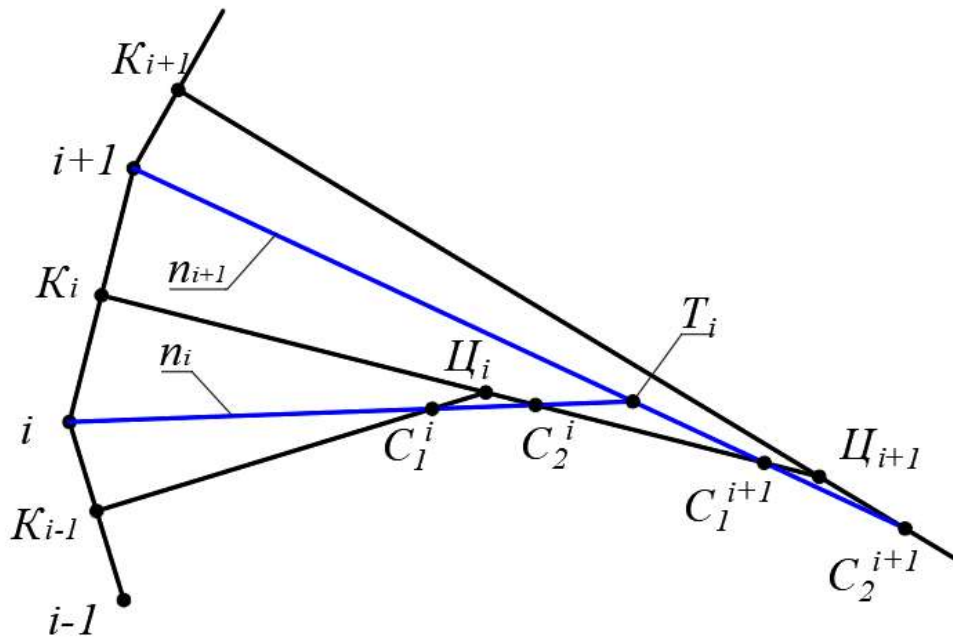


Рис.4. Вихідна область розташування i -го центра кривини

У результаті призначення нормалі n_i розташування нормалі n_{i+1} обмежене умовою перетину її з відрізком $[C_2^i; Ц_{i+1}]$, а розташування нормалі n_{i-1} - перетином з $[Ц_{i-1}; C_1^i]$.

Натомість призначення нормалей n_{i-1} і n_{i+1} у межах обмежених діапазонів впливає на розташування нормалей, призначених у попередніх і наступних точках.

Розташування нормалей n_{i-1} і n_{i+1} повинно забезпечити розташування відрізка $[C_2^i; C_1^{i+1}]$ усередині відрізка $[Ц_i; Ц_{i+1}]$. Крайнім є положення, коли точки C_2^i , C_1^{i+1} і точка перетину нормалей T_i співпадають і розташовуються на прямій, що проходить через середину відрізка $[i; i+1]$ перпендикулярно до цього відрізка. У цьому випадку ділянка монотонної кривої $(i \dots i+1)$ буде сформована дугою кола, радіус якої дорівнює $|i; T_i| = |i+1; T_i|$.

При збільшенні відстані $|C_2^i; C_1^{i+1}|$ збільшується відстань між центрами кривизни C_i та C_{i+1} , що будуть призначені в межах діапазонів $[C_1^i; C_2^i]$ і $[C_1^{i+1}; C_2^{i+1}]$, відповідно. Отже, збільшується довжина ділянки еволюції $(C_i \dots C_{i+1})$, а також і нарощування значень кривини на ділянці інтерполюючої кривої $(i \dots i+1)$.

По мірі збільшення відстані $|C_2^i; C_1^{i+1}|$ діапазони розташування центрів кривини $[C_1^i; C_2^i]$ і $[C_1^{i+1}; C_2^{i+1}]$ збільшуються в розмірах і наближаються до точок $Ц_i$ і $Ц_{i+1}$, відповідно. Крайнім буде положення, коли виконується умова:

$$|i+1, C_1^{i+1}| = |i, C_2^i| + |C_2^i, C_1^{i+1}|.$$

У цьому разі ділянка монотонної кривої $(i \dots i+1)$ буде сформована гладко зістикованими дугами кіл із центрами в точках C_2^i і C_1^{i+1} .

Таким чином, розташування точок C_2^i і C_1^{i+1} у межах відрізка $[C_i; C_{i+1}]$ можна використовувати як критерій розташування нормалей n_i та n_{i+1} з метою забезпечення рівномірної зміни значень кривини вздовж інтерполюючої кривої під час подальшого її формування.

На цій стадії дослідження як близьке до оптимального, нами прийнято розташування нормалей, за яким точки C_2^i і C_1^{i+1} розділяють відрізок $[C_i; C_{i+1}]$ на три рівні частини. Це співвідношення прийнято виходячи з логіки вище викладених міркувань і потребує уточнення під час подальших досліджень.

Пропонується один з можливих варіантів призначення розташування нормалей:

1. Призначимо попереднє розташування n_i при якому точка $C_1^i \equiv n_i \times (K_{i-1} C_i)$ ділить відрізок $[C_{i-1} C_i]$ з відношенням $|C_1^i C_i| : |C_{i-1} C_i| = 1:3$.

2. Визначаємо точку C_2^i в якій n_i перетинає пряму $(K_{i-1} C_i)$. Якщо, відношення довжин відрізків $|C_i C_1^i| : |C_1^i C_{i+1}|$ не більше 1:2, таке положення n_i вважаємо визначеним. В інших випадках кінцевим положенням n_i буде, те при якому C_1^i розділяє відрізок $[C_{i+1} C_i]$ з відношенням $|C_2^i C_i| : |C_i C_{i+1}| = 1:3$

3. Положення нормалі n_{i+1} обирається з двох варіантів:

- точка $C_1^{i+1} \equiv n_{i+1} \times (K_i C_{i+1})$ ділить відрізок $[C_2^i C_{i+1}]$ на рівні частини;
- точка $C_2^{i+1} \equiv n_{i+1} \times (K_{i+1} C_{i+1})$ ділить відрізок $[C_{i+1} C_{i+2}]$ з відношенням $|C_2^{i+1} C_{i+1}| : |C_{i+1} C_{i+2}| = 1:3$.

Кінцевим положенням n_{i+1} буде те, при якому нормаль буде знаходитися ближче до точки C_{i+1} . Призначивши за вказаною схемою положення нормалей для всіх вихідних точок, отримаємо послідовність центрів ДК, радіуси яких відповідають співвідношенню (1).

Положення центрів кривини C_i призначається в межах відрізків C_1^i, C_2^i . Розглянемо варіант призначення цих положень.

1. Для кожної ділянки інтерполюючої кривої визначається ділянка еволюти мінімальної довжини. Для ділянки $(i \dots i+1)$ такою еволютою буде відрізок $[C'_i, C'_{i+1}]$. Довжину і розташування цього відрізка визначають умови:

$$\begin{cases} |C'_i, C'_{i+1}| = |i+1, C'_{i+1}| - |i, C'_i|; \\ |C'_i, T_i| = |C'_{i+1}, T_i|, \end{cases}$$

де $|i+1, C'_{i+1}| - |i, C'_i|$ – різниця значень радіусів кіл, дуги яких утворюють ділянку обводу $(i \dots i+1)$.

Відрізок $[C'_i, C'_{i+1}]$ можна задати визначив його положення відносно трикутника A, C'_{i+1}, T_i (рис. 5).

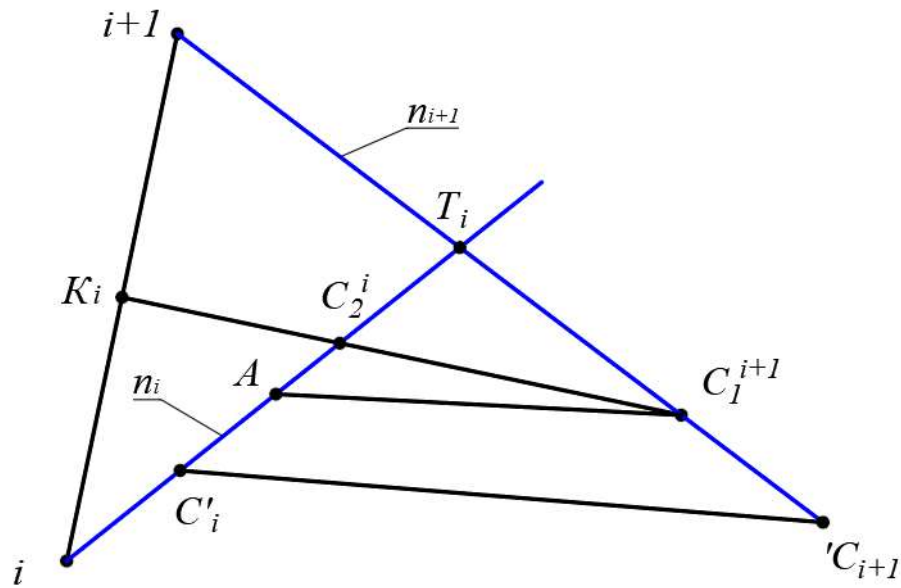


Рис. 5. Визначення мінімальної еволюти ділянки інтерполуючої кривої

Точка А призначається на прямій n_i виходячи з рівності довжин ділянок $|A, T_i| = |C_L^{i+1}, T_i|$.

Положення відрізка $[C'_i, 'C_{i+1}]$ відносно трикутника $A, 'C_{i+1}, T_i$ визначає коефіцієнт:

$$f = \frac{|C'_i, T_i|}{|A, T_i|} = \frac{|'C_{i+1}, T_i|}{|C_L^{i+1}, T_i|} = \frac{|C'_i, 'C_{i+1}|}{|A, C_L^{i+1}|},$$

значення якого розраховується за формулою:

$$f = \frac{|i, A| + |A, C_L^{i+1}| - |i+1, C_L^{i+1}|}{2|T_i, C_L^{i+1}| - |A, C_L^{i+1}|} + 1,$$

2. Визначивши таким чином еволюти мінімальної довжини для кожної ділянки кривої ми отримаємо послідовність відрізків ..., $[C'_{i-1}, 'C_i]$, $[C_i, C'_i]$, $[C'_i, 'C_{i+1}]$, $[C_{i+1}, C'_{i+1}]$, ... (рис. 6). Ця послідовність відрізків задає евольвенту, яка інтреполує заданий точковий ряд і складається з гладко зістикованих кіл.

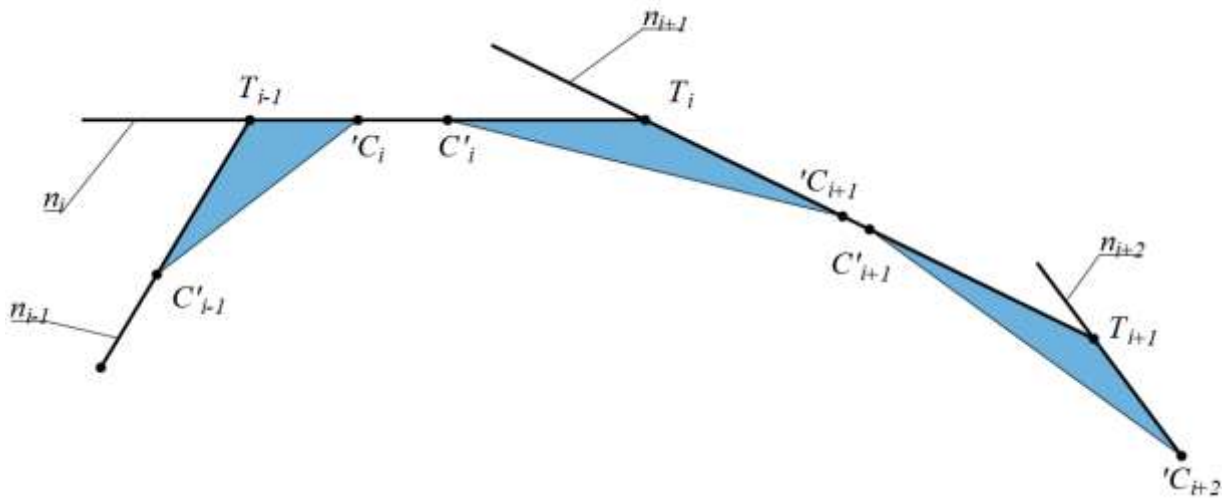


Рис. 6. Послідовність мінімальних еволут

3. Центри кривини інтерполюючої кривої C_i , які відповідають вихідним точкам, призначаються в межах відрізків $[C_i, C'_i]$. Призначення i -го центра кривини в межах відрізка $[C_i, C'_i]$, а $i+1$ -го центра кривини за межами відрізка $[C_{i+1}, C'_{i+1}]$ дає можливість сформувати ділянку еволюти у вигляді випуклої лінії (рис. 7), яка визначає евольвенту як монотонну криву лінію з регулярною зміненою кривини.

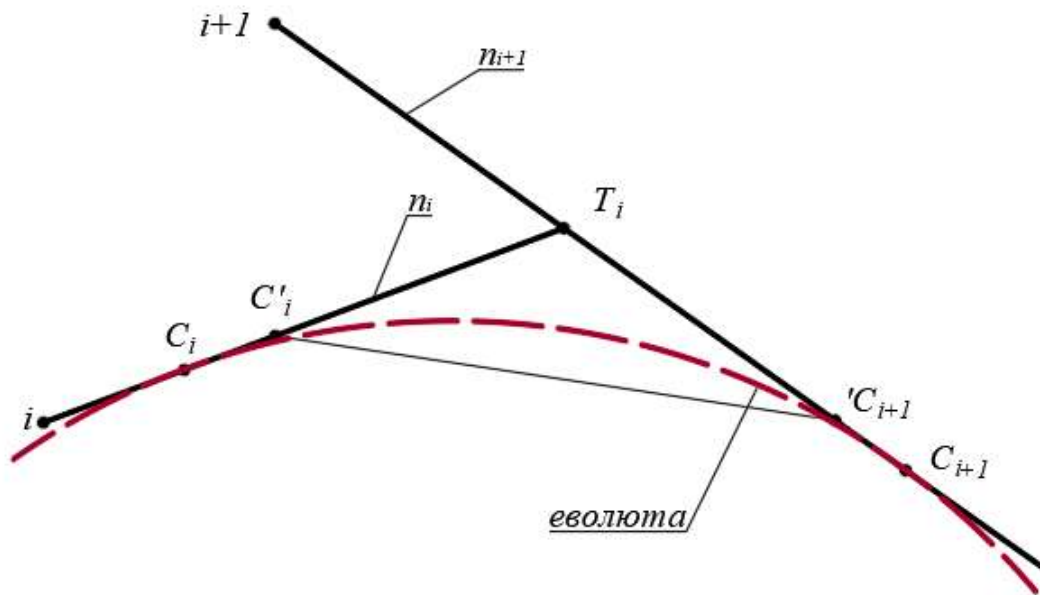


Рис. 7. Ділянка еволюти монотонної кривої

Нормалі інтерполюючої кривої, призначені в вихідних точках і хорди, які поєднують центри кривини, призначені на цих нормалях, обмежують послідовність трикутників (рис. 8). Сторони кожного з трикутників відповідають умові:

$$|C_i, C_{i+1}| \leq R_{i+1} - R_i \leq |C_i, T_i| + |C_{i+1}, T_i|,$$

а їх послідовність є областю можливого розташування еволюти монотонної кривої лінії, котра інтерполює вихідні точки.

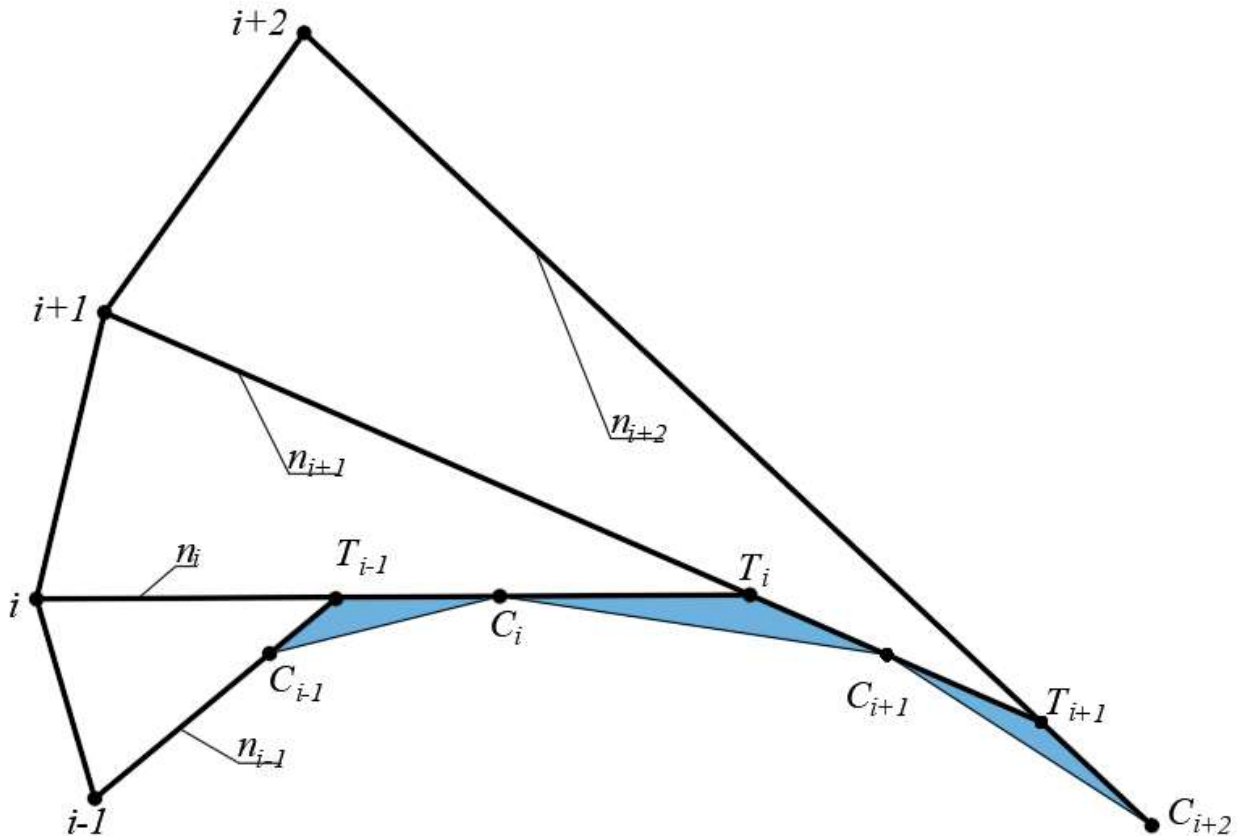


Рис. 8. Область розташування еволюти

Після визначення послідовності трикутників необхідно всередині кожного з них розмістити опуклу криву лінію, яка буде торкатися обох нормалей, а її довжина буде дорівнювати різниці відстаней від вихідних точок до центрів кривини інтерполюючої кривої, що відповідають цим точкам:

$$|C_i, C_{i+1}| = |i+1, C_{i+1}| - |i, C_i|.$$

Висновки. У роботі запропоновано спосіб призначення положень центрів кривини інтерполюючої кривої лінії у вихідних точках. Центри кривини призначаються виходячи з умови регулярної та рівномірної зміни значень кривини вздовж ділянок кривої, на яких вихідні умови дозволяють запобігти виникненню особливих точок.

Спосіб реалізується в два етапи:

- призначення у вихідних точках положень нормалей інтерполюючої кривої лінії;
- призначення положень центрів кривини на вже призначених нормалях.

Положення кожної з нормалей призначається в межах області, яка визначена виходячи із заданих властивостей кривої, що інтерполює. Вихідна область можливого розташування нормалі однозначно визначається координатами п'яти послідовних вихідних точок. Кордони вихідної області уточнюються відповідно до умови одночасного призначення нормалей у попередній та наступній вихідних точках.

Запропонований спосіб одночасного призначення нормалей у всіх вихідних точках забезпечує:

- близьку за величиною пропорцію зменшення вихідної області розташування нормалі для усіх точок;
- розташування кожної з нормалей по центру уточненої області.

Зазначені пропорції є критерієм відповідності призначених положень нормалей конфігурації послідовності вихідних точок.

Положення кожного центру кривини призначається в межах заздалегідь визначеного відрізка, що належить до відповідної нормалі. Зазначені відрізки є діапазонами розташування центрів кривини і враховують усю область можливого розв'язку за вже призначених положеннях нормалей.

Призначення центрів кривини в точках, що обмежують діапазони, задає єдиний розв'язок – інтерполюючу криву лінію, що складається з гладко зістикованих дуг кіл, радіуси яких монотонно зростають уздовж кривої. Призначення центрів кривини всередині діапазонів визначає область можливого розташування еволюти монотонної регулярної кривої лінії, яка інтерполює вихідні точки. У цьому випадку подальший розв'язок не є однозначним. На основі однієї області розташування евольвенти можливе формування безлічі інтерполюючих кривих, характеристики яких відповідають умовам задачі.

Запропоновані в роботі способи засновані на геометричних побудовах, які зводяться до визначення точок перетину прямих ліній та розділення відрізків у заданій пропорції. Необхідні обчислення полягають у вирішенні систем лінійних рівнянь. Простота геометричної та обчислювальної схем забезпечує необхідну точність розрахунків та не вимагає застосування ітераційних процесів.

Зазначені особливості роблять запропонований у роботі спосіб максимально відповідним задачі його подальшої реалізації у вигляді комп'ютерної програми.

Література

1. Вигодський М. Я. Диференціальна геометрія. М.: Наука (Госиздат технико-теоретической літератури), 1949. 280 с.
2. Гавриленко Є. А. Визначення положення центрів кривини дискретно представленої кривої. *Систем. технології*. 2011. № 5. С. 145-151.

DETERMINATION OF THE AREA OF LOCATION OF THE CURVATURE CENTERS OF THE INTERPOLATING CURVE

Illia Tetervak, Yuliia Kholodniak, Yevhen Havrylenko

The article proposes a method for assigning initial data to form an evolution of a monotonic curve interpolating a given sequence of points.

The tasks that can be solved using the proposed method include the formation of graphs describing phenomena or processes, as well as modeling,

based on a set of starting points, of linear frames that define a surface. Controlling the presence of special points is an important condition for solving these problems qualitatively.

The solution to the problem of controlling the presence of special points in the curve interpolating a given point series can be based on the rejection of the analytical representation of the curve sections. The interpolating curve is formed as a region of possible location of its monotonic parts. The main condition for solving the problem is the correct assignment of curve characteristics at the starting points. These characteristics are the position of the normals and the value of the curvature at the starting points. The problem can be solved by forming an evolution of a monotonic curve that interpolates a given point series.

The problem is solved in two stages. First, the position of the normal of the interpolating curve is assigned at all starting points. Secondly, the positions of the curvature centers on the already assigned normals are assigned.

The position of each normal is assigned within a region whose boundaries are determined based on the specified properties of the interpolating curve line. The initial area of possible location of each normal is determined by the coordinates of five consecutive starting points. This initial area is refined by simultaneously assigning the position of the normal at all starting points.

The position of each curvature center is assigned within a predefined segment that takes into account the entire area of its possible location.

Normals assigned at the starting points and segments connecting the curvature centers assigned on these normals delimit a chain of triangles. This sequence of triangles is the region of possible location of the monotonic curve evolution that interpolates the given sequence of points. The task of further forming the evolute is to form its sections in the form of arcs of convex curves that touch the normals at the corresponding centers of curvature. The length of these arcs should be equal to the difference in curvature radii at the points that bound the corresponding section of the interpolating curve.

Setting the position of the normals and curvature centers within the specified ranges makes it possible to create an evolution that defines a monotonic regular curve line along which the curvature values change uniformly and that interpolates the original sequence of points.

Keywords: interpolation, monotonic curved line, special points, normal, center of curvature, evolution, radius of curvature.

References

1. Vigodsky M.Ya. (1967), Differential Geometry, Vyhodskiy M.Ya., 1967, Moscow: Nauka, [in Russian].
2. Havrylenko Y. A. (2011). Determining the position of the curvature centers of a discretely represented curve. *System technologies*. № 5. pp. 145-151. [in Ukrainian].