

УДК 514.18

РОЗГЛЯД МЕТОДІВ НЕПЕРЕРВНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ПЛОСКИХ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНИХ КРИВИХ

Шликов С.Ю., аспірант*,
shlukov.servgik@ukr.net, ORCID:0009-0006-5437-6849

Спірінцев Д.В., канд. техн. наук,
spiritsev@gmail.com, ORCID: 0000-0001-5728-6626

Сюсюкан Ю.М.,
syusyukan@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5539-2449

Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана
Хмельницького (Україна)

У статті представлено комплексний огляд сучасних методів безперервної інтерполяції, що використовуються для побудови плоских кривих на основі дискретних множин точок. Особливу увагу приділено методам поліноміальної інтерполяції, серед яких розглянуто класичні підходи Лагранжа та Ньютона, а також їхні вдосконалення з використанням розділених різниць. Описано метод Ерміта, який забезпечує узгодження не лише значень функції, а й її похідних у вузлах інтерполяції, що дозволяє досягти кращої гладкості кривої. Здійснено аналіз переваг і недоліків методів Невіля та Ейткена, які засновані на ітеративному наближенні значень функції. Окремий розглянуто криві Безьє, які набули широкого застосування у комп'ютерній графіці завдяки можливості зручного керування формою за допомогою контрольних точок. Розглянуто переваги B-сплайнів, які дозволяють забезпечити локальність змін і неперервність похідних заданого порядку без потреби в глобальній перебудові всієї кривої. Обґрунтовано, що попри високу якість апроксимації, усі безперервні методи мають спільні недоліки: ймовірність осциляції, залежність від кількості вузлів, складність локального коригування та відносно високу обчислювальну складність. Зокрема, при наявності розривів або особливостей форми (самоперетинів, загострення, зміни опуклості) безперервні криві виявляються неефективними. У цьому контексті підкреслено перспективність дискретних методів інтерполяції, які дозволяють забезпечити стабільність, відсутність осциляції, простоту реалізації, можливість локальної корекції та точне моделювання кривих довільної складності.

Стаття закладає основу для подальших досліджень у напрямку формалізації підходів до інтерполяції, які відповідають актуальним вимогам інженерного проектування, цифрового моделювання та графічних застосувань.

* Науковий керівник – канд. техн. наук, доцент Спірінцев Д.В.

Ключові слова: інтерполяція, безперервні методи, геометричне моделювання, гладкість, локальне коригування.

Постановка проблеми. Побудова гладких кривих за множинами дискретно заданих точок є ключовою задачею в інженерному проектуванні, комп'ютерній графіці та обробці геометричних даних. Традиційні методи безперервної інтерполяції – зокрема поліноміальні (Лагранжа, Ньютона), кускові (Ерміта, кубічні сплайни) та В-сплайни – детально описані в роботах [1,2,5]. Вони дозволяють досягти неперервності заданого порядку, забезпечити гладкість і точність апроксимації на фрагментах кривих.

Проте при практичному застосуванні виявляються обмеження: високий ступінь полінома спричиняє коливання (ефект Рунге), глобальна структура функцій не дозволяє здійснювати локальні корекції без впливу на всю криву, а обчислювальні витрати при зміні окремих вузлів зростають [2]. Ці проблеми ускладнюють моделювання кривих, що містять особливі точки – самоперетини, злами або ділянки з розривами похідних. Як показано в роботі [4], особливо актуально це стає в задачах, де геометрія має складну топологію або потребує високої точності локального керування.

У зв'язку з цим постає питання переосмислення ролі класичних безперервних методів та переходу до альтернатив — зокрема, до дискретних і незв'язних інтерполяцій, які мають менше обмежень. Як зазначають Piegł i Tiller [3], локальність В-сплайнів є вирішальною перевагою, однак навіть вони не завжди достатньо гнучкі для задач з геометріями довільної складності. Це обґрунтовує необхідність подальшого розвитку дискретних підходів, які поєднують точність, стійкість і локальне керування без осциляцій.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У науковій літературі безперервні методи інтерполяції тривалий час були домінуючими. Праця Press et al. [1] стала однією з основних у систематизації чисельних алгоритмів побудови інтерполяційних функцій, у тому числі методів Лагранжа, Ньютона та кубічних сплайнів. У ній проаналізовано похибки, чутливість до розташування вузлів та переваги кускових підходів. Kahaner та співавтори [2] розширили цей аналіз, акцентуючи увагу на чисельній стабільності та ефекті осциляції при високостепеневій інтерполяції.

Із розвитком комп'ютерної графіки особливого значення набули В-сплайни, які детально описані в монографії Piegł i Tiller [3]. Вони забезпечують локальність редагування та контроль гладкості. Проте в задачах із геометрично складними об'єктами, як зазначає Денискін [4], навіть В-сплайни можуть бути недостатньо гнучкими. Особливо це помітно в умовах потреби у збереженні точок зламу, самоперетину або повернення. В українському контексті важливе місце займає праця Бойка [5], що пропонує доступну класифікацію класичних і сучасних методів

інтерполяції, адаптовану до освітніх і практичних задач.

Узагальнення результатів свідчить про те, що безперервні методи, хоча й добре опрацьовані, мають низку критичних обмежень. Це актуалізує потребу в альтернативних – дискретних – підходах, що дозволяють здійснювати локальні зміни, гарантувати відсутність коливань і забезпечити простоту реалізації.

Формулювання цілей статті. Метою статті є здійснити огляд основних методів безперервної інтерполяції плоских дискретно представлених кривих, проаналізувати їхні можливості та обмеження з точки зору точності, гладкості, локальності й обчислювальної складності, а також обґрунтувати доцільність переходу до дискретних, зокрема незв'язних, методів інтерполяції як більш адаптивного підходу до моделювання складних геометричних форм.

Основна частина. Розглянемо відомі методи неперервної інтерполяції. Характерною рисою всіх методів неперервної інтерполяції плоских дискретно заданих точкових рядів у декартовій системі координат є орієнтація на побудову неперервної функції (кривої), яка проходить через задані точки. Залежно від типу функції, яку використовують для інтерполяції, ці методи поділяють на глобальні – коли вся послідовність точок описується однією функцією, та кускові (сегментні) – коли інтерполяційна крива формується з фрагментів (дуг) однакових або різних кривих, з'єднаних із певним порядком гладкості. У подальшому буде розглянуто основні з існуючих підходів до неперервної інтерполяції.

Поліноміальна інтерполяція: метод Лагранжа

Цей метод відноситься до методів глобальної неперервної інтерполяції [1,2,5], суть яких полягає в тому, що для інтерполяції в $n + 1$ заданих точках (x_i, y_i) , $i = \overline{0, n}$ ($x_0 < x_1 < \dots < x_n$) необхідно побудувати многочлен степеня n з $n + 1$ коефіцієнтами.

Перевагами інтерполяційного алгебраїчного многочлена Лагранжа є його простота і чіткість. Однак при його використанні слід враховувати наступне:

1. Може використовуватися тільки для однозначних кривих (для випадків, коли виконується умова – $x_0 < x_1 < \dots < x_n$).
2. Найчастіше, щоб зробити висновок про те, «придатна» отримана інтерполяційна крива чи ні, необхідно її побудувати і наочно оцінити. Наприклад, при інтерполяції точок, що лежать на кривій,

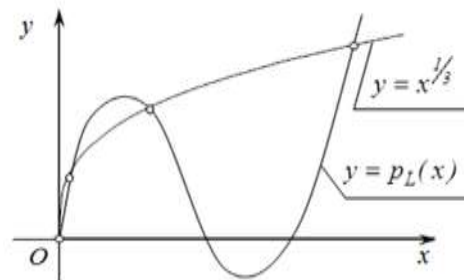


Рис. 1

що описується функцією, $y = x^{1/3}$ за допомогою кубічного многочлена $p_L(x)$ виходить не зовсім задовільний результат (рис. 1)

3. Можливе небажане коливання, яке зростає зі збільшенням степеня

многочлена $p_L(x)$, що безпосередньо залежить від числа інтерполяційних точок. Наприклад, при великому степені многочлен n може доходити до $(n-1)$ максимумів і мінімумів, якщо всі нулі $p'_L(x)$ виявляться дійсними [6].

4. Виправлення координат точок в ряду або додавання точок в ряд призводить до необхідності перерахунку всіх коефіцієнтів многочлена, що підвищує трудомісткість процесу обчислення.
5. Чим більший стіпень многочлена, тим більше інтерполяційний многочлен буде відхилятися від вихідної функції при наближенні до меж інтерполяційного відрізка (феномен Рунге).

Поліноміальна інтерполяція: метод розділених різниць

Метод інтерполяції Ньютона з використанням розділених різниць відрізняється від многочлена Лагранжа наступним чином [7]:

- коефіцієнти ньютонівського многочлена отримані простішим способом;
- менша похибка в обчисленні розділених різниць забезпечується за рахунок меншого числа віднімань близьких чисел;
- додавання кількості вузлів (наприклад x_{n+1}, y_{n+1}) не призводить до перерахунку вже обчислених поліноміальних коефіцієнтів.

Незважаючи на переваги ньютонівського інтерполяційного многочлена над алгебраїчним многочленом Лагранжа, він має ті ж недоліки, що й многочлен Лагранжа.

Кусково-поліноміальна інтерполяція: метод Ерміта

Однією з модифікацій многочлена Лагранжа є інтерполяційний многочлен Ерміта. При його побудові необхідно, щоб x_i не тільки значення функції, але і їх похідні збігалися з табличними даними в певному порядку. Загальний вираз ермітового інтерполяційного многочлена дуже громіздкий, так що використовувати його для розрахунків практично неможливо. Тому при вирішенні практичних завдань інтервал $[x_0, x_n]$ розбиваються на кілька підінтервалів, кожен з яких інтерполюється з поліномами Ерміта низького степеня, з подальшим їх «склеюванням». У цьому випадку використовується інтерполяційний многочлен, який передає значення функції та її першої похідної у двох вузлах. Відзначимо деякі особливості складених кривих, окремі відрізки яких є ермітовими інтерполяційними многочленами. По-перше, на цій же сітці числове значення похибки ньютонівського многочлена буде більшим, ніж у ермітового многочлена. По-друге, при використанні ермітових многочленів необхідно знати значення похідних у вузлових точках. По-третє, зовнішній вигляд функції на кожному відрізку є оригінальним, що може ускладнити теоретичний аналіз у випадках, коли необхідний загальний вигляд функції в символічній формі. По-четверте, дуже зручно використовувати ермітові поліноми при побудові складених просторових

кривих. Відкритим залишається питання про скорочення часу розрахунку. Слід зазначити, що ермітові многочлени, задані виразом (1.3), забезпечують тільки перший порядок гладкості. Для більшого ступеня гладкості масив перших похідних може бути обчислений методом прогону, що дозволяє будувати кубічні сплайни.

Існують також інші методи, такі як *Невіля і Ейткена* [6], в яких інтерполяційні величини обчислюються за допомогою ітерацій. Переваги цих методів полягають в тому, що в результаті ітерацій виходить плавна збіжність і невелика похибка. До недоліків можна віднести те, що для кожного нового значення x доводиться виконувати всі обчислення від початку і до кінця.

З усього різноманіття неперервних методів найбільшими можливостями управління формою модельованої кривої володіють *криві Безьє*, для яких характерні такі особливості:

- початкова і кінцева контрольні точки лежать на кривій, яка є безперервною по всій її довжині;
- використання кривих Безьє є найбільш зручним для інтерактивної апроксимації кривих (у комп'ютерній графіці це означає, що користувач може задавати форму кривої шляхом переміщення опорних точок курсором на екрані);
- крива не має проміжків, дотичні до кривої в початковій і кінцевій контрольних точках є відрізками, що з'єднують їх з двома іншими сусідніми контрольними точками;
- є кілька видів точок з'єднання між відрізками, що дозволяє забезпечити різні форми з'єднання (гладку, тангенціальну або згинальну);
- ступінь кривої Безьє визначається кількістю точок задачі, і всі вони впливають на форму всієї кривої;
- можливість використання для задання поверхні, з можливістю контролю її параметрів.

Криві Безьє нижнього порядку (2-го, 3-го) найпростіше побудувати, так як криві більш високих степенів вимагають більше обчислень при обробці. При апроксимації кривої складної форми за допомогою кривої Безьє використовується набір точок задання, в результаті чого виходить крива високого порядку, яка може коливатися і створює велике обчислювальне навантаження на комп'ютер. Тому для апроксимації кривих зі складними формами окремі криві Безьє можуть бути послідовно з'єднані між собою в сплайн Безьє. Однак в цьому випадку з'єднання кривих для забезпечення безперервності похідних потрібних порядків виявляється досить складною процедурою і є досить трудомістким процесом.

Шліци мають великі можливості для моделювання складних кривих з ділянками різної опуклості (ділянками перегину). *Сплайни* - це гладкі, але гнучкі криві, які мають багато застосувань при побудові криволінійних фігур і побудові графіків. Сплайн в інтервалі між вузлами інтерполяції є

многочленом малого степеня, у всьому інтерполяційному відрізку сплайн - це функція, «склеєна» з многочленів заданого степеня.

Використання кубічних шліців дозволяє досягти безперервності других похідних (безперервність кривизни). Крім того, сплайнові криві характеризуються тим, що вони вимагають лише трохи попередньої інформації про похідні. Однак, як і всі безперервні криві, вони мають такі недоліки:

- поліноміальні сплайни не підходять для апроксимації кривих з вертикальними дотичними.

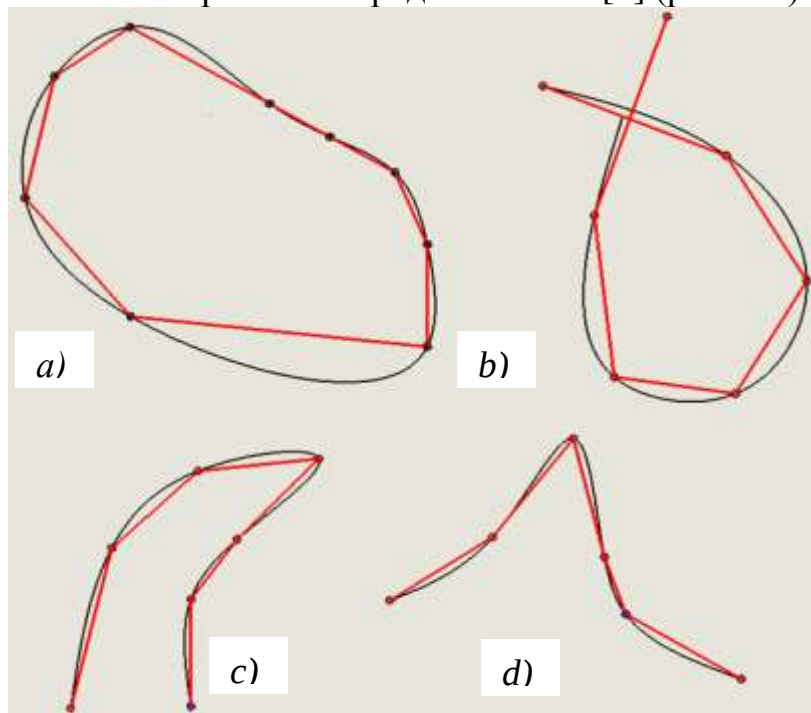
- З естетичної точки зору шліци не завжди прийнятні. Кривизна поверхні, побудованої за допомогою шліців, іноді змінюється нерівномірно, що призводить, наприклад, до химерних спотворень відображення предметів від кузова автомобіля.

- Локальна зміна тягне за собою перерахунок всього сплайна.

- Сплайни схильні до коливань при апроксимації кривої, що має розриви других похідних, наприклад, спряження прямої і дуги кола

З цих чотирьох обмежень перше може бути усунуто, а четверте розслаблено за допомогою параметричних сплайнів. Другий недолік (проблема «кривого дзеркала») менш актуальний для напружених шліців. Третій недолік може бути усунутий за допомогою В-сплайнів, які дозволяють внести локальну зміну кривої без її повного перерахунку. Крім того, представлення сплайнових кривих у вигляді В-сплайнів має певні переваги з точки зору обчислювальної стійкості [6].

Однак, існує ряд задач, для вирішення яких використання сплайнових кривих має ряд обмежень [7] (рис. 1.2).



a – ДПК, що містить
прямолінійну ланку;
b – фрагмент ДПК,
що містить точку
самоперетину;
в – фрагмент ДПК,
що містить точку
повернення 2-го
роду;
д – фрагмент ДПК,
що містить точку
загострення
(перелому)

Рис. 2. Обмеження щодо використання сплайнів

Висновок. У статті здійснено огляд основних методів безперервного геометричного моделювання кривих, представлених дискретними множинами точок. Незважаючи на глибоку розробленість цих методів, вони не позбавлені недоліків — зокрема, коливань, недостатньої локальності та складності корекції форми без впливу на інші ділянки. Методи, що забезпечують більший контроль, зазвичай мають багато параметрів, що ускладнює модель і знижує її точність. Крім того, жорстка прив'язаність до визначених функціональних класів обмежує гнучкість при відображенні складних геометрій. На відміну від цього, дискретні методи інтерполяції забезпечують стабільність, точну локальну корекцію, відсутність коливань і простоту реалізації, що робить їх перспективними для подальшого розвитку в задачах моделювання.

Література

1. Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 994 с. DOI: 10.1137/1031025.
2. Kahaner D., Moler C., Nash S. *Numerical Methods and Software*. — Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989. 495 с.
3. Piegl L., Tiller W. *The NURBS Book*. 2nd ed. Berlin: Springer, 1997. 646 с. — DOI: 10.1007/978-3-642-97385-7.
4. Денискін Ю. І. Керування формами криволінійних примітивів у задачах твердотілого моделювання. *Прикладна геометрія*. 2005. Вип. 7. С. 53–69.
5. Бойко І. Ю. *Методи інтерполяції*. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2011. 132 с.
6. Faux I. D., Pratt M. J. *Computational geometry for design and manufacture*. Chichester: Ellis Horwood Ltd., 1979. 306 p.
7. Спірінцев Д. В. Дискретна інтерполяція на основі варіативного формування різницевих схем кутових параметрів: дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. Мелітополь, 2010. 217 с.

REVIEW OF CONTINUOUS INTERPOLATION METHODS FOR PLANAR DISCRETELY REPRESENTED CURVES

Serhiy Shlykov, Dmytro Spirintsev, Yuri Syusyukan

The article presents a comprehensive review of modern continuous interpolation methods used for constructing planar curves based on discrete point sets. Particular attention is paid to polynomial interpolation methods, including classical approaches such as Lagrange and Newton interpolation, as well as their improvements using divided differences. The Hermite method is

described, which ensures agreement not only of function values but also of their derivatives at interpolation nodes, allowing for improved curve smoothness. The advantages and limitations of Neville and Aitken methods, which are based on iterative approximation of function values, are analyzed. A separate section is devoted to Bézier curves, which have found wide application in computer graphics due to the convenient control of shape through control points. The benefits of B-splines are considered, as they allow local modifications and continuity of derivatives of a given order without the need to recalculate the entire curve globally. It is substantiated that despite high approximation quality, all continuous methods share common disadvantages: oscillation tendencies, dependence on the number of nodes, difficulty in local adjustment, and relatively high computational complexity. In particular, in the presence of discontinuities or geometric features (self-intersections, cusps, curvature changes), continuous curves become ineffective. In this context, the article highlights the potential of discrete interpolation methods, which ensure stability, absence of parasitic oscillations, ease of implementation, possibility of local correction, and precise modeling of curves of arbitrary complexity.

The article lays the foundation for further research in the direction of formalizing interpolation approaches that meet current demands in engineering design, digital modeling, and graphical applications.

Keywords: interpolation, continuous methods, geometric modeling, local correction.

References

1. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. (2002). *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge: Cambridge University Press. DOI: 10.1137/1031025.
2. Kahaner D., Moler C., Nash S. (1989). *Numerical Methods and Software*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.
3. Piegl L., Tiller W. (1997). *The NURBS Book*. 2nd ed. Berlin: Springer. DOI: 10.1007/978-3-642-97385-7.
4. Deniskin Y.I. (2005). Control of the shapes of curvilinear primitives in solid modeling problems. *Prykladna heometriia*. Vol. 7. pp. 53–69. [in Ukrainian]
5. Boyko I.Yu. (2011). *Interpolation methods*. Lviv: Vydavnytstvo Lvivskoi politekhniky. [in Ukrainian]
6. Faux I.D., Pratt M.J. (1979). *Computational geometry for design and manufacture*. Chichester: Ellis Horwood Ltd.
7. Spirintsev D.V. (2010). Discrete interpolation based on the variational formation of difference schemes of angular parameters: candidate's thesis: 05.01.01. Мелітополь: ТДАТУ. [in Russian]