УДК 514.18

ПРИКЛАДИ УТВОРЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧНОГО ТОЧКОВОГО ПОЛІНОМУ

DOI: 10.33842/2313-125X-2026-29-24-32

Верещага В.М., д-р.техн. наук,
vervik1949@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0038-8300
Лисенко К.Ю., PhD
Lysenko_Kseniya@mspu.edu.ua, ORCID: 0000-0003-3047-6352
Спірінцев Д.В., канд. техн. наук,
spirintsev@gmail.com, ORCID: 0000-0001-5728-6626
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (м. Запоріжжя, Україна)
Грубич М.В.,
mariya.grubich@gmail.com , ORCID: 0009-0003-9056-3826
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» (м. Київ, Україна)

Виходячи із попередніх досліджень, наголошується, що однією із головних умов складання точкових поліномів для кривих ліній є утворення однопараметричних характеристичних функцій, із яких створюється одноразмірна компоматриця, і які являють собою функціональний базис створюваного точкового поліному. Підкреслюється, що для кожної точки вихідної дискретно поданої кривої лінії утворюється окрема характеристична функція. Для цього параметризується кожна точка вихідного точкового ряду уздовж ланок його супровідної ламаної лінії.

Надається пояснення щодо утворення характеристичних функцій у вигляді простих відношень трьох точок, яке є інваріантом паралельного проєктування. Наводиться приклад параметризації базисних точок дискретно поданої просторової кривої лінії.

Надано приклади утворення двох характеристичних функцій для прямої лінії, трьох характеристичних, що проходять через криву, визначену трьома точками та чотирьох характеристичних функцій для кривої, визначеної чотирма базисними точками. Створено графіки-схеми для трьох та чотирьох характеристичних функцій, вирази яких було записано попередньо. Також наведено узагальнені записи для усіх розглянутих характеристичних функцій. Створено також узагальнений запис характеристичних функцій для дискретно поданої кривої лінії, що визначена n базисними точками. Вказується, що усі разом характеристичні функції являють собою, в параметричній формі, функціональний базис точкового поліному, який неперервно описує вихідний дискретно поданий ряд точок, що визначає просторову криву лінію. Надаються рівняння точкового поліному у загальному вигляді та у координатних формах.

За результатами дослідження встановлено, що для побудови неперервної композиційної просторової кривої, заданої дискретним рядом точок, необхідно формувати характеристичні функції базисних точок, які утворюють функціональний базис кривої та є елементами однорозмірної параметричної композиційної матриці. Запропонований узагальнений запис характеристичної функції дозволяє уникнути невизначеності типу нуль поділити на нуль і забезпечує коректність її побудови.

Ключові слова: точкові поліноми, однопараметричні характеристичні функції, компоматриця параметрична, функціональний базис точкового поліному, параметризація точок, дискретна крива лінія.

Постановка проблеми. У попередніх статтях авторів досліджувалися окремі питання утворення однопараметричних характеристичних функцій, параметризації базисних точок дискретної кривої лінії, для яких утворювалися ці характеристичні функції та з їхнім використанням як елементів – однопараметричних композиційних матриць параметричних. Однак системного викладення матеріалу з аналізом усіх деталей як в розгорнутих так і в узагальненому вигляді характеристичних функцій ще не публікувалося і це було певною проблемою для розуміння цілісної картини означеного питання. Надана стаття усуває вказану проблему і заповнює відповідну прогалину.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Перші дослідження щодо створення композиційного методу геометричного моделювання були проведені в роботах [1, 2, 3], більш ґрунтовні дослідження композиційного методу висвітлювалися в роботах [4, 5, 6, 7]. Спосіб композиційного диференціювання було розглянуто у роботі [8], в якому здійснюється аналітичний опис у точковій формі графічного способу диференціювання дискретно поданої плоскої кривої лінії. Наразі зараз здійснюється порівняльний аналіз відмінностей композиційних матриць і алгебраїчних матриць стосовно їхнього означення, утворення і призначення. Обґрунтовано необхідність розробки та доцільність використання композиційних матриць точкових і параметричних.

Формулювання цілей статті. Здійснити системне викладення матеріалу, з аналізом усіх деталей як в розгорнутих так і в узагальненому вигляді, характеристичних функцій щодо їхнього утворення, призначення та операцій з ними.

Основна частина. Як відомо ([9]-стаття публікується у цій збірці), для утворення точкових поліномів $L(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot p_i(t);\ 0 \leq t \leq 1$, які композиційно інтерполюють дискретний ряд точок, необхідно створити дві компоматриці – точкову і параметричну.

Ці компоматриці будуть однорозмірними, тобто такими, що складатимуться з одного рядка чи то одного стовпця і кількість елементів у цих компоматрицях буде однаковою, тому що утворені вони для одного і того ж дискретного точкового ряду.

Точкові компоматриці [9] у загальному вигляді своїми елементами мають точки – A_i. Компоматриці параметричні своїми елементами мають характеристичні функції – $p_i(t)$, для $i = \overline{1, n}$.

Однакова кількість елементів точкової та параметричної компоматриць говорить про те, що для кожної точки вихідного дискретного точкового ряду утворюється своя характеристична функція. Перш ніж утворювати характеристичні функції – $p_i(t)$, необхідно параметризувати кожну з точок вихідного дискретного ряду. Параметризацію точок здійснюватимемо уздовж відтинків прямих, які з'єднують сусідні точки вихідного дискретного ряду, тобто уздовж ланок супровідної ламаної лінії. Як відомо з геометрії, будь-яке відношення є інваріантом паралельного проєктування. Отже, утворювані характеристичні функції у вигляді відношень, будуть інваріантами паралельного проєктування.

А це означає, що і вирази характеристичних функцій, і їх значення будуть однаковими як у просторі так і на будь-якій паралельній проєкції. Тобто їх вирази не потребуватимуть перетворень у процесі проєктування, а значення характеристичних функцій не потребуватимуть переобчислень, а лишатимуться константами.

Наведемо приклад параметризації дискретного ряду точок. Нехай просторову криву визначають п'ять точок A_i, $i = \overline{1{,}5}$ (рис.1). З'єднаємо ці точки відтинками прямих, довжина яких l_{01}, l_{12}, l_{23}, l_{34}, l_{45}.

Визначимо сумарну довжину l_{15} супровідної ламаної лінії:

$$l_{15} = \sum_{j=0}^{4} l_{j(j+1)}$$

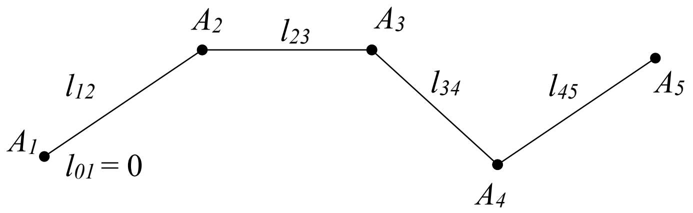

Рис. 1. Схема щодо параметризації базисних точок.

Тоді параметри – t_i точок – A_i, для $i = \overline{1{,}5}$ обчислюватимуться:

$$t_1 = \frac{l_{01}}{l_{15}} = 0;\ t_2 = \frac{l_{01}+l_{12}}{l_{15}};\ t_3 = \frac{l_{01}+l_{12}+l_{13}}{l_{15}};$$
$$t_4 = \frac{l_{01}+l_{12}+l_{13}+l_{14}}{l_{15}};\ t_5 = \frac{l_{15}}{l_{15}} = 1. \qquad (1)$$

Надалі наведемо приклади утворення характеристичних функцій.

1) Нехай лінія визначена двома точками, для яких, у відповідності до (1), значення параметрів $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Запишемо відношення для характеристичних функцій: $p_1 = \frac{t-t_2}{t_1-t_2}$, $p_2 = \frac{t-t_1}{t_2-t_1}$ де t – параметр поточної точки. Матимемо точкове рівняння прямої лінії:

$$L(t) = A_1 \cdot p_1 + A_2 \cdot p_2,\ 0 \le t \le 1, \qquad (2)$$

якому відповідають координатні (обчислювальні) рівняння точкового поліному (у цьому випадку – прямої лінії):

$$L_x(t) = x_1 \cdot p_1(t) + x_2 \cdot p_2(t), L_y(t) = y_1 \cdot p_1(t) + y_2 \cdot p_2(t), \\ L_z(t) = z_1 \cdot p_1(t) + z_2 \cdot p_2(t). \tag{2-а}$$

2) Нехай просторова крива визначена трьома точками – A_1, A_2, A_3. У відповідності до (1) маємо обчислені параметри $t_1 = 0$, t_2, $t_3 = 1$. Характеристичні функції матимуть вигляд таких відношень:

$$p_1 = \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}, p_2 = \frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}, p_3 = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}. \tag{3}$$

Вирази характеристичних функцій (3) мають другий степінь.

Для t_1: $p_1 = 1, p_2 = 0, p_3 = 0$;

для t_2: $p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = 0$;

для t_3: $p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 1$.

Надамо графічні схеми p_1, p_2, p_3:

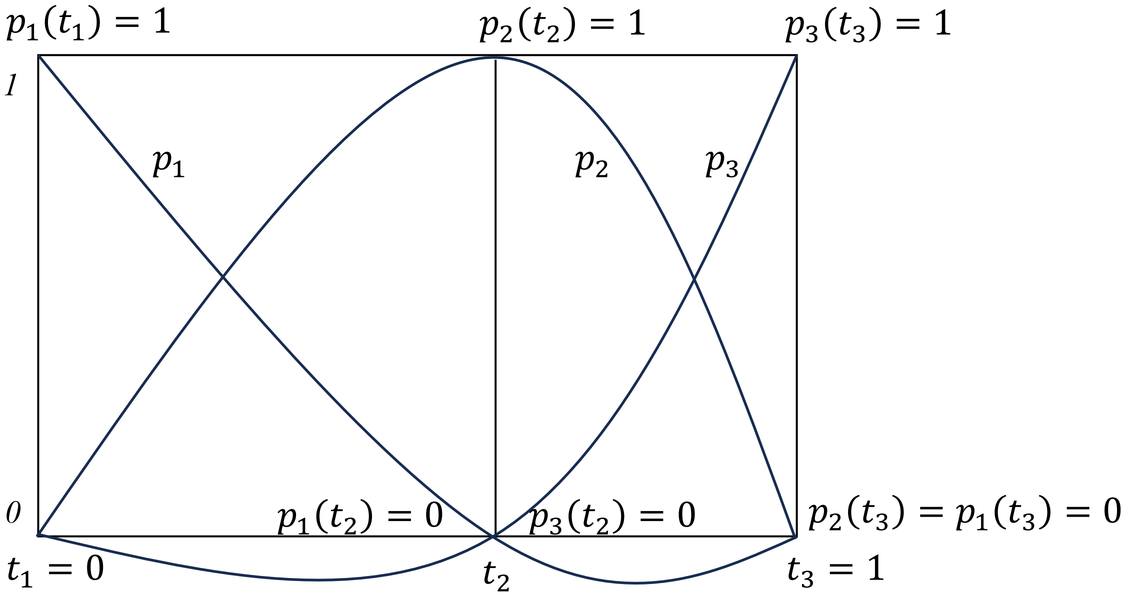

Рис. 2. Графіки-схеми характеристичних функцій для кривої, визначеної трьома точками.

Надамо записи характеристичних функцій (3) у загальному вигляді:

$$p_{(1)} = \frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq(1)}}^{n=3}(t-t_i)}{\prod_{\substack{\iota=1 \\ \iota\neq(1)}}^{n=3}(t_{(1)}-t_\iota)}, p_{(2)} = \frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq(2)}}^{n=3}(t-t_i)}{\prod_{\substack{\iota=1 \\ \iota\neq(2)}}^{n=3}(t_{(2)}-t_\iota)}, p_{(3)} = \frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq(3)}}^{n=3}(t-t_i)}{\prod_{\substack{\iota=1 \\ \iota\neq(3)}}^{n=3}(t_{(3)}-t_\iota)} \tag{4}$$

У (4) для $p_{(1)}$ застосований запис $i \neq (1)$ під знаком добутку означає, що в добутках різниць і в чисельнику, і в знаменнику має бути відсутнім множник $(t_1 - t_1)$.

Для $p_{(2)}$ запис $i \neq (2)$ означає – відсутність множника $(t_2 - t_2)$.

Для $p_{(3)}$ запис $i \neq (3)$ означає – відсутність множника $(t_3 - t_3)$.

Тобто у p_1 не має бути множника $\frac{t_1 - t_1}{t_1 - t_1}$, у p_2 має бути відсутнім множник $\frac{t_2 - t_2}{t_2 - t_2}$, аналогічно для p_3 – відсутній множник $\frac{t_3 - t_3}{t_3 - t_3}$.

3) Нехай просторова крива визначається чотирма точками A_i, для $i = \overline{1,4}$; параметри яких $t_1 = 0$, t_2, t_3, $t_4 = 1$, тоді розгорнутий запис характеристичної функції p_1 матиме вигляд:

$$\left.\begin{aligned}
p_1 &= \frac{(t - t_2)(t - t_3)(t - t_4)}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)(t_1 - t_4)} \Longrightarrow p_{(1)} = \frac{\prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq (1)}}^{n=4} (t - t_i)}{\prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq (1)}}^{n=4} (t_{(1)} - t_i)}; \\
p_2 &= \frac{(t - t_1)(t - t_3)(t - t_4)}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)(t_2 - t_4)} \Longrightarrow p_{(2)} = \frac{\prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq (2)}}^{n=4} (t - t_i)}{\prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq (2)}}^{n=4} (t_{(2)} - t_i)}; \\
p_3 &= \frac{(t - t_1)(t - t_2)(t - t_4)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)(t_3 - t_4)} \Longrightarrow p_{(3)} = \frac{\prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq (3)}}^{n=4} (t - t_i)}{\prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq (3)}}^{n=4} (t_{(3)} - t_i)}; \\
p_4 &= \frac{(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)}{(t_4 - t_1)(t_4 - t_2)(t_4 - t_3)} \Longrightarrow p_{(4)} = \frac{\prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq (4)}}^{n=4} (t - t_i)}{\prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq (4)}}^{n=4} (t_{(4)} - t_i)}.
\end{aligned}\right| \qquad (5)$$

Як і у попередньому прикладі (4), характеристичні функції із (5) $p_{(1)}(t_1) = p_{(2)}(t_2) = p_{(3)}(t_3) = p_{(4)}(t_4) = 1$ (рис. 3), решта інших варіантів, коли $(i) \neq i$, їх значення дорівнюють нулеві.

Надамо графічні схеми для характеристичних функцій (5).

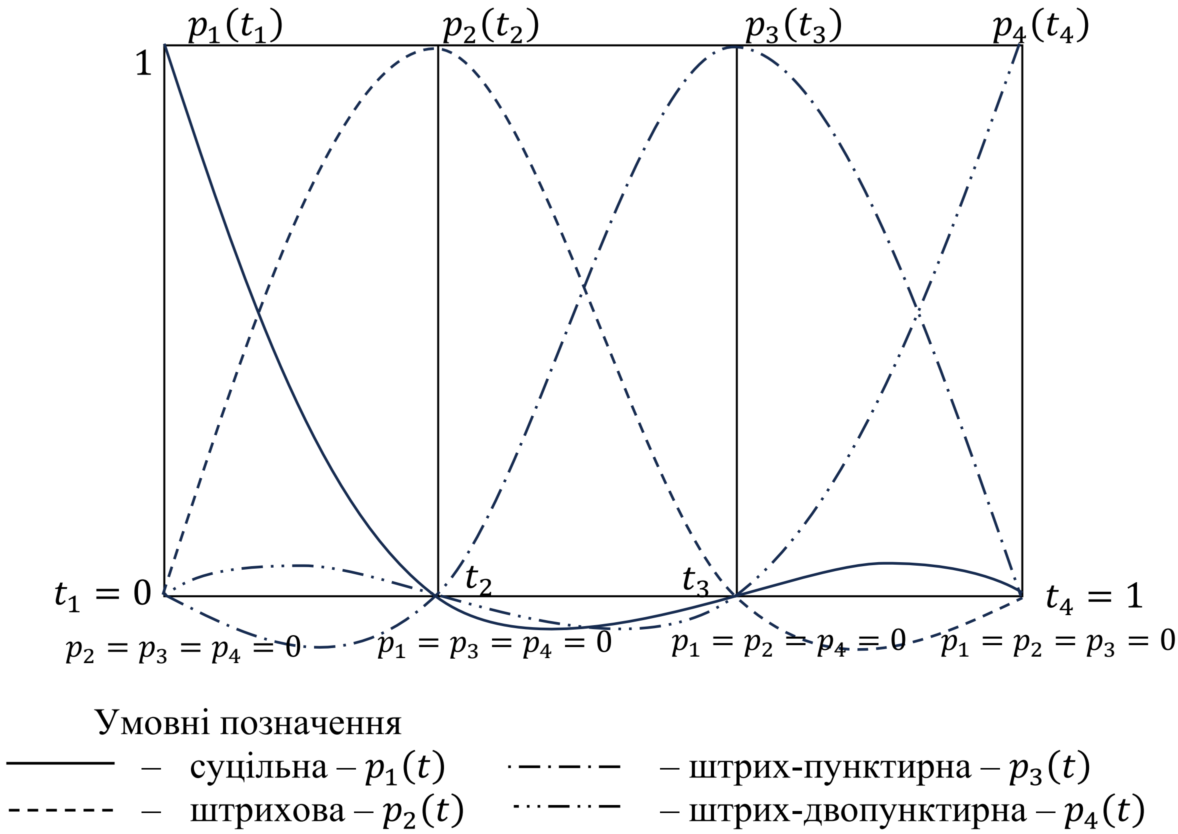

Рис. 3. Графіки-схеми характеристичних функцій для кривої, визначеної чотирма точками

Надамо узагальнене позначення характеристичних функцій для дискретної кривої, визначеної *n* базисними точками:

$$p_{(i)}(t) = \frac{\prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq (i)}}^{n} (t - t_i)}{\prod\limits_{\substack{\iota=1 \\ \iota \neq (\iota)}}^{n} \left(t_{(\iota)} - t_\iota\right)}, (i) = i = \overline{1, n}; \tag{6}$$

де $(i) = i$ – запис означає, що *i* в дужках та без них пробігають усі значення від 1 до *n*;

t_i – значення параметрів у базисних точках;

$t_{(i)}$ – значення параметру в базисній точці, для якої утворюється характеристична функція $p_{(i)}$.

Усі разом характеристичні функції (6) являють собою характеристичні функції в параметричній формі точкового поліному, загальний вигляд якого:

$$L(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot p_i(t), 0 \leq t \leq 1 \, . \tag{7}$$

де A_i – точки просторового вихідного дискретного точкового ряду,

$p_i(t)$ – відповідні точкам характеристичні функції.

Записи координатних форм точкового поліному (7) виглядатимуть наступним чином:

$$\left.\begin{aligned} L_x(t) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i(t), \\ L_y(t) &= \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot p_i(t), \qquad 0 \le t \le 1. \\ L_z(t) &= \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot p_i(t), \end{aligned}\right| \qquad (8)$$

Точковий поліном у загальній формі (7) призначений для записів формалізованих розв'язків, а точкові поліноми координатні (8) використовуються для здійснення обчислень за формалізованими розв'язками. Як бачимо, у точкових рівняннях і (7), і (8) характеристичні функції $p_i(t)$ не змінюються, тому що вони є інваріантами паралельного проєктування.

Висновки. За результатами досліджень, проведених у цій статті, з'ясовано таке.

1. Для утворення неперервної композиційної просторової кривої лінії, яка подана дискретним рядом точок, необхідно утворювати характеристичну функцію для кожної з цих точок вихідного ряду, які називаються базисними точками.

2. Утворені характеристичні функції являють собою функціональний базис отриманої композиційної кривої. Крім того усі характеристичні функції є елементами однорозмірної композиційної матриці параметричної.

3. Запропонований, у загальному вигляді, запис, що дозволяє в утворенні характеристичної функції уникнути появи множника-дробу, у якого як у чисельнику так і у знаменнику, матимуть місце різниці параметрів з одинаковими індексами. Наявність такого множника призведе до виникнення невизначеності типу нуль поділений на нуль, тобто характеристична функція у цьому випадку ставатиме хибною.

Література

1. Адоньєв Є. О. Композиційний метод геометричного моделювання багатофакторних систем : дис. ... д-ра техн. наук : 05.01.01. Київ, 2018. 512 с.
2. Верещага В. М. Композиційне геометричне моделювання : монографія. Мелітополь : ФОП Однорог Т. В., 2017. 108 с.
3. Верещага В. М., Найдиш А. В., Адоньєв Є. О., Лисенко К. Ю. Основи композиційного геометричного моделювання : навч. посіб. Мелітополь:

ФОП Однорог Т. В., 2019. 255 с.
4. Лисенко К. Ю. Теоретичні основи методів утворення композиційних ліній і поверхонь : дис. ... канд. техн. наук : 05.01.01. Київ, 2022. 267 с.
5. Павленко О. М. Порівняльний аналіз композиційної інтерполяції з традиційними методами. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2022. Вип. 103. С. 162–174. https://doi.org/10.32347/0131-579X.2022.103.162-174
6. Павленко О. М. Параметричні композиційні матриці. *Обухівські читання : зб. тез доп. XVII Міжнар. наук.-практ. конф.* (Київ, 30 берез. 2023 р.). Київ : НУБіП України, 2023. С. 91–96.
7. Лисенко К. Ю. Точкові композиційні матриці. *Обухівські читання : зб. тез доп. XVII Міжнар. наук.-практ. конф.* (Київ, 30 берез. 2023 р.). Київ: НУБіП України, 2023. С. 97–99.
8. Верещага В., Лисенко К., Адоньєв Є., Муртазієв Е., Верещага І., Воліна Т. Аналітичний опис у точковій формі способу графічного диференціювання плоскої кривої лінії. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2025. Vol. 6, No. 1 (138). P. 54–63. DOI: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2025.343387

EXAMPLES OF FORMATION OF CHARACTERISTIC FUNCTIONS FOR A ONE-PARAMETER POINT POLYNOMIAL

Viktor Vereshchaha, Kseniia Lysenko, Dmytro Spirintsev, Mariya Hrubych

Based on previous research, it is established that one of the key conditions for constructing point polynomials is the formation of one-parameter characteristic functions, from which a one-dimensional compomatrix is created, serving as the functional basis of the point polynomial. It is emphasized that for each point of the source discretely defined curve, a separate characteristic function is formed. For this purpose, each point of the source point sequence is parameterised along the links of its accompanying polyline.

An explanation is provided regarding the formation of characteristic functions in the form of simple ratios of three points, which is an invariant of parallel projection. An example of parameterisation of base points of a discretely defined spatial curve is given.

Examples are provided of forming characteristic functions for a straight line, for three characteristic functions passing through a curve defined by three points, and for four characteristic functions for a curve defined by four base points. Graph-schemes are created for three and four characteristic functions. Generalised expressions are given for all considered characteristic functions and for a discretely defined curve with N base points. It is stated that all characteristic functions together constitute, in parametric form, the functional basis of a point polynomial that continuously interpolates the source point sequence. Equations of the point polynomial in general and coordinate forms are provided.

As a result of the study, it was established that the construction of a *continuous composite spatial curve defined by a discrete set of points requires the formation of characteristic functions of the basis points, which constitute the functional basis of the curve and are elements of a one-dimensional parametric composite matrix. The proposed generalized representation of the characteristic function makes it possible to avoid the indeterminate form zero divided by zero and ensures its correct construction.*

Keywords: point polynomials, one-parameter characteristic functions, parametric compomatrix, functional basis of point polynomial, parameterisation of points, discrete curve.

References

1. Adoniev, Ye. O. (2018). Compositional method of geometric modeling of multifactor systems. (Doctoral dissertation, specialty 05.01.01). Kyiv, 512 p. [In Ukrainian].
2. Vereshchaha, V. M. (2017). Compositional geometric modeling. Melitopol: FOP Odnoroh T. V., 108 p. [In Ukrainian].
3. Vereshchaha, V. M., Naidysh, A. V., Adoniev, Ye. O., & Lysenko, K. Yu. (2019). Fundamentals of compositional geometric modeling. Melitopol: FOP Odnoroh T. V., 255 p. [In Ukrainian].
4. Lysenko, K. Yu. (2022). Theoretical foundations of methods for constructing compositional curves and surfaces. (PhD dissertation, specialty 05.01.01). Kyiv, 267 p. [In Ukrainian].
5. Pavlenko, O. M. (2022). Comparative analysis of compositional interpolation with traditional methods. Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika, 103, 162–174. https://doi.org/10.32347/0131-579X.2022.103.162-174 [In Ukrainian].
6. Pavlenko, O. M. (2023). Parametric compositional matrices. In Obukhivski chytannia: zbirnyk tez dopovidei XVII Mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii (Kyiv, March 30, 2023) (pp. 91–96). Kyiv: NUBiP Ukrainy. [In Ukrainian].
7. Lysenko, K. Yu. (2023). Point compositional matrices. In Obukhivski chytannia: zbirnyk tez dopovidei XVII Mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii (Kyiv, March 30, 2023) (pp. 97–99). Kyiv: NUBiP Ukrainy. [In Ukrainian].
8. Vereshchaha, V., Lysenko, K., Adoniev, Ye., Murtaziiev, E., Vereshchaha, I., & Volina, T. (2025). Analytical description in point form of the method of graphical differentiation of a plane curve line. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 6(1(138)), 54–63. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2025.343387 [In English].

Матеріал надійшов до редакції 23. 04. 2026
Прийнято до друку 13. 05. 2026 р.