

УДК 514.18

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КОВЗАННЯ ЧАСТИНКИ ПО
ПОВЕРХНІ ВЕРТИКАЛЬНОГО ПРЯМОГО ГЕЛІКОЇДА, ЯКИЙ
ОБЕРТАЄТЬСЯ НАВКОЛО ВЛАСНОЇ ОСІ**

DOI: 10.33842/2313-125X-2026-29-44-55

Воліна Т.М., д-р. техн. наук,

volina@nubip.edu.ua, ORCID: 0000-0001-8610-2208

Бабка В.М., канд. техн. наук,

babkavitaliy@ukr.net, ORCID: 0000-0003-4971-4285*Національний університет біоресурсів і природокористування України
(м. Київ, Україна)*

Ребрій А.М.,

ralm777.as@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3467-2353*Сумський національний аграрний університет (м. Суми, Україна)*

Захарова І.О., канд. пед. наук,

zaharova_soippo@ukr.net, ORCID: 0000-0002-9693-5550*Сумський педагогічний університет (м. Суми, Україна)*

Прямий гелікоїд може бути відкритим або закритим в залежності від способу його утворення. Якщо прямолінійний горизонтальний відрізок здійснює гвинтовий рух і при цьому перетинає вертикальну вісь, то гелікоїд буде закритим і відомим у техніці під назвою шнек. Якщо відрізок не перетинає вісь, рухаючись на певній відстані від неї, то утворений гелікоїд буде відкритим. У гвинтових конвеєрах застосовуються закриті гелікоїди як загальновідомі технічні гвинтові поверхні. Однак можливе використання інших гвинтових поверхонь, що потребує створення відповідної моделі руху частинки. Особливості даного дослідження полягають у створенні узагальненої математичної моделі, яка описує рух частинки по обох гелікоїдах. Цим вона відрізняється від відомих робіт, орієнтованих на конкретну поверхню. Отримані диференціальні рівняння другого порядку описують траєкторію ковзання частинки по поверхні. В залежності від конструктивних параметрів такою поверхнею може бути відкритий або закритий гелікоїд, а також частковий випадок – обертання горизонтального плоского диска. Це дозволило отримати параметри руху частинки по різних поверхнях та порівняти одержані результати. В результаті розв'язання диференціальних рівнянь чисельними методами побудовано траєкторії ковзання частинки по поверхні закритого і відкритого вертикальних гелікоїдів, які обертаються навколо власної осі. З'ясовано, що принципової різниці між траєкторіями ковзання немає. Одночасно при такому ковзанні здійснюється підйом частинки вгору. В початковий момент частинка на закритому гелікоїду опускається вниз, а потім піднімається вгору, тому її швидкість підйому

дещо менша в порівнянні із закритим гелікоїдом. Якщо гелікоїди нерухомі, частинка починає опускатися вниз по поверхні, віддаляючись від осі гелікоїда і з часом зупиняється. Траєкторії ковзання частинки побудовано в межах відсіку поверхні, а також за умови, що вона не обмежена циліндром.

Ключові слова: прямиї і відкритий гелікоїди, траєкторія, кутова швидкість, складний рух, диференціальні рівняння.

Постановка проблеми. Для транспортування сипкого технологічного матеріалу широко використовуються гвинтові конвеєри. Підйом матеріалу здійснюється за рахунок обертання гвинтової поверхні в нерухомому циліндричному кожусі. Якщо розглядати транспортування окремої частинки, то цей процес можна розділити на два етапи: 1) ковзання частинки по гвинтовій поверхні до зустрічі із кожухом; 2) підйом частинки при одночасному ковзанні по двох поверхнях. Зважаючи на те, що рухома гвинтова поверхня, тобто гелікоїд, може бути закритим або відкритим, виникає задача математичного опису руху частинки із врахуванням цієї обставини. Наукові дослідження з цієї теми є важливими, тому що вони дозволяють визначити кінематичні параметри частинки на першому етапі її руху по робочому органу. Результати таких досліджень потрібні практиці, тому що вони дозволять визначити параметри підйому частинки на другому етапі і порівнювати їх для різних робочих поверхонь. З огляду на це тематика наукових досліджень з цієї проблематики є актуальною.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Зважаючи на складність математичного опису процесу транспортування сипкого матеріалу гвинтовими конвеєрами більшість робіт у цьому напрямі присвячено експериментальним дослідженням. Наприклад, у праці [1] вивчався процес транспортування волокнистих аграрних матеріалів. Рух матеріалу спостерігався за допомогою високошвидкісної камери при різних швидкостях обертання гвинтової поверхні і рівнях заповнення конвеєра. В статті [2] велися дослідження вертикального транспортування піску і бобів. Було зроблено висновок, що збільшення кутової швидкості обертання гвинтової поверхні не завжди приводить до зростання продуктивності – після певного значення кутової швидкості ефективність транспортування починає падати. При цьому для піску і бобів оптимальна кутова швидкість має різне значення. В праці [3] використано метод дискретних елементів для моделювання руху частинок гранул добрива, їх зіткнень та взаємодії з гвинтовою поверхнею. Застосування рухомого тригранника Френе при транспортуванні окремої частинки розглянуто в праці [4]. Транспортування окремої частинки вгору при одночасній її взаємодії з рухомою гвинтовою поверхнею і нерухомим кожухом розглянуто в праці [5]. В ній визначено вектор абсолютної швидкості частинки графічним методом додаванням векторів відносної та переносної швидкостей. Це додавання здійснено в площині, дотичній до

циліндричного кожуха в точці знаходження частинки. Таким чином, вивчення процесу транспортування технологічного матеріалу у гвинтових конвеєрах здійснюється експериментальними або теоретичними дослідженнями. При теоретичних дослідженнях існують різні підходи, однак не застосовується опис гвинтової поверхні параметричними рівняннями. Застосування такого опису дозволяє по-новому підійти до створення математичної моделі ковзання частинки по гвинтовій поверхні у складному русі і отримати нові результати у вигляді траєкторій ковзання.

Формулювання цілей статті. Метою роботи є створення узагальненої математичної моделі складного руху частинки по поверхні вертикального прямого гелікоїда, який обертається навколо власної осі.

Основна частина. Прямий гелікоїд може мати дві модифікації: закритий (рис. 1, а, б) і відкритий (рис. 1, в, г). В обох випадках прямолінійна твірна поверхні перпендикулярна до його осі.

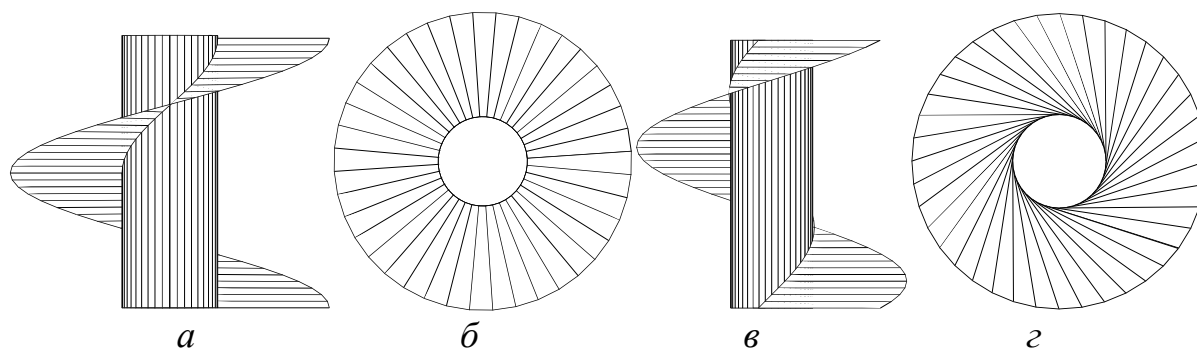


Рис. 1. Модифікації прямого гелікоїда: а – фронтальна проекція закритого гелікоїда; б – горизонтальна проекція закритого гелікоїда; в – фронтальна проекція відкритого гелікоїда; г – горизонтальна проекція відкритого гелікоїда

Параметричні рівняння відкритого прямого гелікоїда мають наступний вигляд:

$$X = r \cos \alpha - u \sin \alpha; \quad Y = r \sin \alpha + u \cos \alpha; \quad Z = R \alpha \operatorname{tg} \beta, \quad (1)$$

де r і R – радіуси внутрішнього і зовнішнього обмежуючих поверхню циліндрів; β – кут підйому зовнішньої гвинтової лінії (рис. 2), α і u – незалежні змінні поверхні. При $r=0$ рівняння (1) описують поверхню прямого закритого гелікоїда. Незалежні змінні мають фізичний зміст: α – кут повороту радіус-вектору точки на поверхні навколо осі гелікоїда; u – відстань вздовж прямолінійної твірної поверхні від нульового значення (для закритого гелікоїда – від його осі).

Диференціальні рівняння руху частинки складатимемо за загальновідомою формулою, яка у векторному вигляді записується $m\bar{w} = \bar{F}$, де m – маса частинки, \bar{w} – вектор абсолютного прискорення, \bar{F} – результуючий вектор прикладених до частинки сил. Всі вектори будемо

визначати в проекціях на осі нерухомої системи координат. Векторами прикладених до частинки сил є: сила ваги $m \cdot g$, спрямована вниз ($g=9,81 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння), реакція поверхні N , спрямована по нормалі до поверхні, та сила тертя $f \cdot N$, спрямована в протилежну сторону від напрямку ковзання частинки (f – коефіцієнт тертя). Прикладені до частинки сили показані на рис. 2, на якому також позначена штриховою лінією ймовірна траєкторія ковзання частинки.

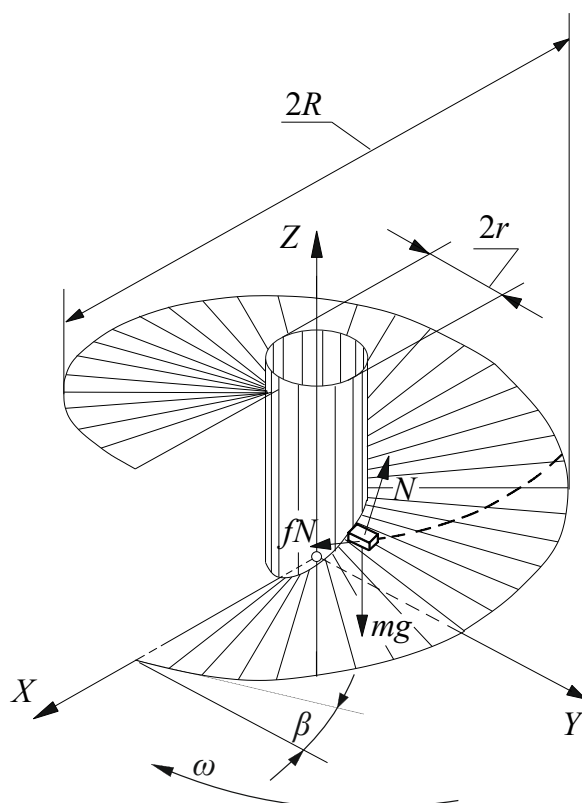


Рис. 2. Позначення конструктивних параметрів закритого гелікоїда та прикладених до частинки сил

При встановленні певної залежності між незалежними змінними поверхні α і u на поверхні гелікоїда буде описана лінія. Будемо вважати, що така залежність встановлена через параметр t – час ковзання частинки по поверхні. В такому випадку внутрішнє рівняння відносної траєкторії руху частинки описується залежностями $u = u(t)$, $\alpha = \alpha(t)$.

Відносною траєкторією руху частинки (тобто траєкторією ковзання) будуть рівняння (1) при умові, що $u = u(t)$, $\alpha = \alpha(t)$. Ці залежності є невідомими і їх потрібно знайти в результаті розв'язку диференціальних рівнянь, які необхідно скласти.

Продиференційовані рівняння (1) по параметру t із урахуванням того, що $u = u(t)$, $\alpha = \alpha(t)$, описують не поверхню, а лінію на ній – траєкторію ковзання частинки. З огляду на це для похідних, які є проекціями відносної швидкості частинки, прийнято позначення малими літерами:

$$\begin{aligned}
x' &= -u' \sin \alpha - \alpha'(r \sin \alpha + u \cos \alpha); \\
y' &= u' \cos \alpha + \alpha'(r \cos \alpha - u \sin \alpha); \\
z' &= R\alpha' \operatorname{tg} \beta.
\end{aligned} \tag{2}$$

Геометрична сума проєкцій (2) дасть величину відносної швидкості:

$$V = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{(u'^2 + r\alpha'^2)^2 + \alpha'^2 (u^2 + R^2 \operatorname{tg}^2 \beta)}. \tag{3}$$

Для того, щоб частинка змогла ковзати по поверхні одночасно піднімаючись вгору, поверхня повинна обертатися за годинниковою стрілкою з кутовою швидкістю ω , як позначено на рис. 2. Нехай кут повороту поверхні позначається через φ , тобто $\varphi = -\omega t$. Із застосуванням відомих формул повороту параметричні рівняння поверхні після її повороту на кут φ запишуться:

$$\begin{aligned}
X &= (r \cos \alpha - u \sin \alpha) \cos \varphi - (r \sin \alpha + u \cos \alpha) \sin \varphi; \\
Y &= (r \cos \alpha - u \sin \alpha) \sin \varphi + (r \sin \alpha + u \cos \alpha) \cos \varphi; \\
Z &= R\alpha \operatorname{tg} \beta.
\end{aligned} \tag{4}$$

Після спрощень з врахуванням $\varphi = -\omega t$ рівняння (4) набувають вигляду:

$$\begin{aligned}
x &= u \sin(\omega t - \alpha) + r \cos(\omega t - \alpha); \\
y &= u \cos(\omega t - \alpha) - r \sin(\omega t - \alpha); \\
z &= R\alpha \operatorname{tg} \beta.
\end{aligned} \tag{5}$$

Якщо взяти до уваги, що $u = u(t)$ і $\alpha = \alpha(t)$, то рівняння (5) описують лінію на поверхні. Ця лінія є абсолютною траєкторією руху частинки, оскільки вона включає два рухи: ковзання частинки по поверхні і обертання поверхні. Через те ліві частини рівнянь позначено малими літерами.

Абсолютне прискорення частинки може бути отримано послідовним диференціюванням абсолютної траєкторії (5) по часу t . Перша похідна є проєкціями абсолютної швидкості частинки:

$$\begin{aligned}
x' &= [u' - r(\omega - \alpha')] \sin(\omega t - \alpha) + u(\omega - \alpha') \cos(\omega t - \alpha); \\
y' &= [u' - r(\omega - \alpha')] \cos(\omega t - \alpha) - u(\omega - \alpha') \sin(\omega t - \alpha); \\
z' &= R\alpha' \operatorname{tg} \beta.
\end{aligned} \tag{6}$$

Диференціювання (6) дає змогу отримати проєкції абсолютного прискорення:

$$\begin{aligned}
x'' &= [(\omega - \alpha')(2u' - r(\omega - \alpha')) - u\alpha''] \cos(\omega t - \alpha) + \\
&\quad + [(u'' - u(\omega - \alpha')^2 + r\alpha'')] \sin(\omega t - \alpha); \\
y'' &= -[(\omega - \alpha')(2u' - r(\omega - \alpha')) - u\alpha''] \sin(\omega t - \alpha) + \\
&\quad + [(u'' - u(\omega - \alpha')^2 + r\alpha'')] \cos(\omega t - \alpha); \\
z'' &= R\alpha'' \operatorname{tg} \beta.
\end{aligned} \tag{7}$$

Необхідно знайти проєкції прикладених сил. Вектор ваги частинки

спрямований вертикально вниз. В такому випадку одиничний напрямний вектор цієї сили в проєкціях на осі нерухомої системи координат запишеться:

$$\{0; \quad 0; \quad -1\}. \quad (8)$$

Друга прикладена сила – реакція \bar{N} гелікоїда, спрямована по нормалі до поверхні. Її напрям дії визначається векторним добутком двох векторів, дотичних до координатних ліній в точці знаходження частинки. Ці два вектори є частинними похідними рівнянь (1):

$$\begin{aligned} X'_\alpha &= -r \sin \alpha - u \cos \alpha; & X'_u &= -\sin \alpha; \\ Y'_\alpha &= r \cos \alpha - u \sin \alpha; & Y'_u &= \cos \alpha; \\ Z'_\alpha &= r \operatorname{tg} \beta; & Z'_u &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

В похідних (9) індекс внизу вказує, по якій змінній відбувалося диференціювання. Після векторного множення векторів (9) його проєкції запишуться:

$$\{R \operatorname{tg} \beta \cos \alpha; \quad R \operatorname{tg} \beta \sin \alpha; \quad u\}. \quad (10)$$

Слід мати на увазі, що нормальний вектор поверхні може бути спрямований в одну або протилежну сторону від точки на поверхні в залежності від порядку чергування стрічок векторів (9) у визначнику, з якого визначається нормаль поверхні. Тут важливо вибрати потрібний напрям. Оскільки сила ваги частинки спрямована вниз, то реакція поверхні має бути спрямована так, щоб її складова у вертикальному напрямі мала протилежний знак, тобто була додатною.

Вектор (10) прикладений до поверхні за умови, що вона нерухома. Оскільки поверхня за час t повертається на кут $\varphi = -\omega t$, то і вектор (10) потрібно повернути на цей кут, щоб він відповідав точці розташування частинки на поверхні. Після повороту вектора (10) на вказаний кут і приведення його до одиничного отримаємо:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{R \cos(\omega t - \alpha) \sin \beta}{\sqrt{R^2 \sin^2 \beta + u^2 \cos^2 \beta}}; \\ N_y &= -\frac{R \sin(\omega t - \alpha) \sin \beta}{\sqrt{R^2 \sin^2 \beta + u^2 \cos^2 \beta}}; \\ N_z &= \frac{u \cos \beta}{\sqrt{R^2 \sin^2 \beta + u^2 \cos^2 \beta}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Третя сила тертя fN спрямована в протилежному напрямі відносно швидкості V руху частинки. Це означає, що напрям дії сили визначається проєкціями (2), взятих із протилежним знаком. Їх ділення на модуль швидкості (3) дає одиничний вектор. Після повороту на кут $\varphi = -\omega t$ можна остаточно отримати його проєкції на осі координат:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{(u' + r\alpha')\sin(\omega t - \alpha) - u\alpha' \cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{(u'^2 + r\alpha'^2)^2 + \alpha'^2(u^2 + r^2 \operatorname{tg}^2 \beta)}}; \\ \frac{(u' + r\alpha')\cos(\omega t - \alpha) + u\alpha' \sin(\omega t - \alpha)}{\sqrt{(u'^2 + r\alpha'^2)^2 + \alpha'^2(u^2 + r^2 \operatorname{tg}^2 \beta)}}; \\ R\alpha' \operatorname{tg} \beta \\ \frac{R\alpha' \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{(u'^2 + r\alpha'^2)^2 + \alpha'^2(u^2 + r^2 \operatorname{tg}^2 \beta)}}. \end{array} \right\} \quad (12)$$

Одиничні вектори дії прикладених до частинки сил визначені, отже можна скласти диференціальні рівняння її руху. На неї діє сила ваги mg в напрямі вектору (8), реакція поверхні N в напрямі вектору (11) і сила тертя fN в напрямі вектору (12). Векторне рівняння $m\bar{w} = \bar{F}$ необхідно розписати в проєкціях на осі координат з урахуванням того, що проєкції вектору абсолютного прискорення \bar{w} наведені у виразах (7):

$$\begin{aligned} mx'' &= N \frac{R \cos(\omega t - \alpha) \sin \beta}{\sqrt{R^2 \sin^2 \beta + u^2 \cos^2 \beta}} - fN \frac{(u' + r\alpha')\sin(\omega t - \alpha) - u\alpha' \cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{(u'^2 + r\alpha'^2)^2 + \alpha'^2(u^2 + r^2 \operatorname{tg}^2 \beta)}}; \\ my'' &= -\frac{R \sin(\omega t - \alpha) \sin \beta}{\sqrt{R^2 \sin^2 \beta + u^2 \cos^2 \beta}} - fN \frac{(u' + r\alpha')\cos(\omega t - \alpha) + u\alpha' \sin(\omega t - \alpha)}{\sqrt{(u'^2 + r\alpha'^2)^2 + \alpha'^2(u^2 + r^2 \operatorname{tg}^2 \beta)}}; \\ mz'' &= -mg + N \frac{u \cos \beta}{\sqrt{R^2 \sin^2 \beta + u^2 \cos^2 \beta}} - fN \frac{R\alpha' \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{(u'^2 + r\alpha'^2)^2 + \alpha'^2(u^2 + r^2 \operatorname{tg}^2 \beta)}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Підстановка в (13) абсолютного прискорення (7) і розв'язок системи відносно других похідних невідомих функцій $\alpha = \alpha(t)$, $u = u(t)$, а також $N = N(t)$, дає результат:

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \frac{\cos \beta}{B^2} \frac{u \cos \beta (\omega - \alpha') [2u' - r(\omega - \alpha')] - Rg \sin \beta}{\sqrt{R^2 \sin^2 \beta + u^2 \cos^2 \beta}} - f \frac{A\alpha'}{VB}; \\ u'' &= \frac{Cu(\omega - \alpha')^2 - 2ruu'(\omega - \alpha') \cos^2 \beta + Rrg \cos \beta \sin \beta}{B^2} - f \frac{Au'}{VB}; \\ N &= \frac{mA}{B}, \end{aligned} \quad (14)$$

де для компактності запису рівнянь (14) прийнято наступні позначення окремих виразів:

$$\begin{aligned} A &= ug \cos \beta + R(\omega - \alpha') [2u' - r(\omega - \alpha')] \sin \beta; \\ B &= \sqrt{R^2 \sin^2 \beta + u^2 \cos^2 \beta}; \\ C &= (r^2 + u^2) \cos^2 \beta + R^2 \sin^2 \beta; \\ V &- \text{згідно виразу (3)}. \end{aligned} \quad (15)$$

При $\beta = 0$ і $r = 0$ частковий випадок із рівнянь (14), які описують ковзання частинки по шорсткому горизонтальному диску, який

обертається навколо вертикальної осі, набувають вигляду:

$$\alpha'' = \frac{2u'}{u}(\omega - \alpha') - f \frac{g\alpha'}{\sqrt{u'^2 + u^2\alpha'^2}};$$

$$u'' = u(\omega - \alpha')^2 - f \frac{gu'}{\sqrt{u'^2 + u^2\alpha'^2}};$$

$$N = mg.$$
(16)

Рівняння (14) описані в полярній системі координат і відомі із класичних прикладів розділу динаміки курсу теоретичної механіки.

Система із трьох рівнянь (14) зводиться до розв'язування системи із двох перших рівнянь, а третє рівняння (реакція N поверхні) стає визначеним після знаходження залежностей $u = u(t)$ і $\alpha = \alpha(t)$. Розв'язування системи із перших двох рівнянь (14) потребує застосування чисельних методів. Прийнято, що коефіцієнт тертя $f = 0,3$. На рис. 3, а побудовано траєкторії ковзання частинки по поверхні закритого гелікоїда ($r = 0$), який обертається із різними кутовими швидкостями включно із нерухомою поверхнею ($\omega = 0$). Зображений відсік поверхні обмежений двома радіусами $r = 0,03$ м і $R = 0,1$ м, при цьому кут підйому зовнішньої обмежувальної гвинтової лінії $\beta = 15^\circ$. Траєкторії ковзання побудовані протягом $t = 0,1$ с з моменту початку руху від внутрішньої обмежувальної гвинтової лінії. За цей час частинка виходить за межі відсіку поверхні крім частинки, яка опускається по нерухомому гелікоїду під дією сили власної ваги. На рис. 3, б побудовано графіки зміни координати Z за цей період.

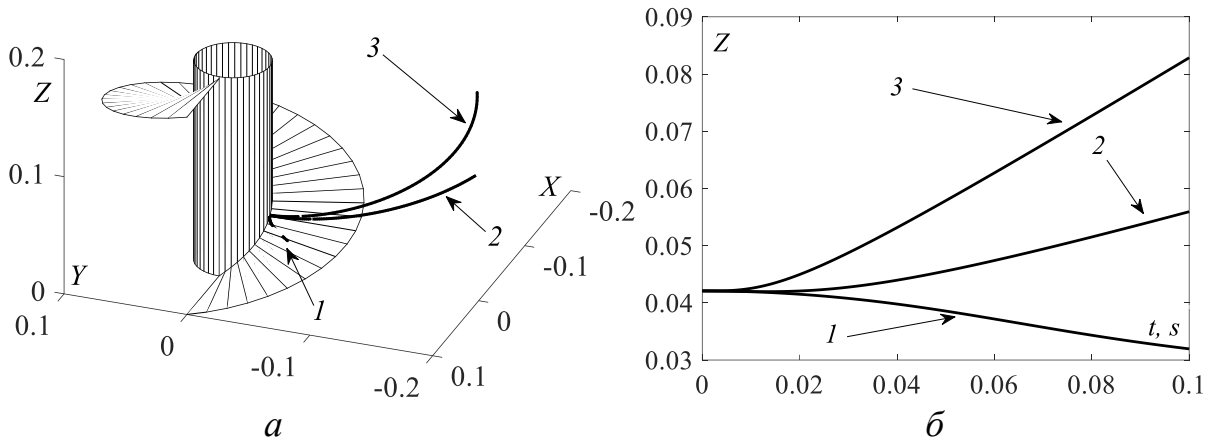


Рис. 3. Кінематичні параметри руху частинки по прямому закритому гелікоїду для різних кутових швидкостей його обертання (1 – $\omega = 0$; 2 – $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$; 3 – $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$): а – відносна траєкторія руху частинки (траєкторія ковзання по поверхні); б – графік підйому (опускання) частинки

При ковзанні по нерухомій поверхні частинка опускається вниз і згодом зупиняється. В цьому можна переконатися, побудувавши графік відносної швидкості за залежністю (3). Це пояснюється тим, що по мірі віддалення частинки від осі поверхні зменшується кут найбільшого нахилу

дотичної площини до поверхні в точці її розташування. Коли він стає меншим кута тертя, частинка після руху за інерцією зупиняється. По поверхні, яка обертається, частинка ковзає по ній, піднімаючись вгору, причому зі збільшенням кутової швидкості обертання зростає висота підйому. Однак слід мати на увазі, що підйом або опускання частинки залежить від кута β і кутової швидкості ω обертання гелікоїда.

На рис. 4 побудовано ті ж самі графіки для прямого відкритого гелікоїда при $r = 0,03$ м. Слід мати на увазі, що при значенні $r = 0$ у рівняннях (1) поверхнею є прямий закритий гелікоїд, а при $r = 0,03$ м – прямий відкритий гелікоїд. Однак в обох випадках рух частинки починається на відстані $0,03$ м від осі обертання, що задається в початкових умовах інтегрування рівнянь (14).

Із порівняння рис. 3, 4 можна зробити висновок, що за однакових умов частинка піднімається на більшу висоту по поверхні прямого закритого гелікоїда.

Аналіз результатів чисельного моделювання дозволяє порівняти динаміку підйому частинки для двох типів гелікоїдів. Встановлено, що за однакових умов ($\omega = 0 \text{ с}^{-1}$, $t = 0,1 \text{ с}$) висота підйому на закритому гелікоїді становить $0,032$ м, тоді як на відкритому – $0,022$ м. Кількісна різниця становить $31,25$ %. Підвищення кутової швидкості до $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$ на відкритому гелікоїді дозволяє збільшити висоту підйому до $0,058$ м, що на $41,4$ % перевищує показники закритого гелікоїда ($0,082$ м) через меншу швидкість.

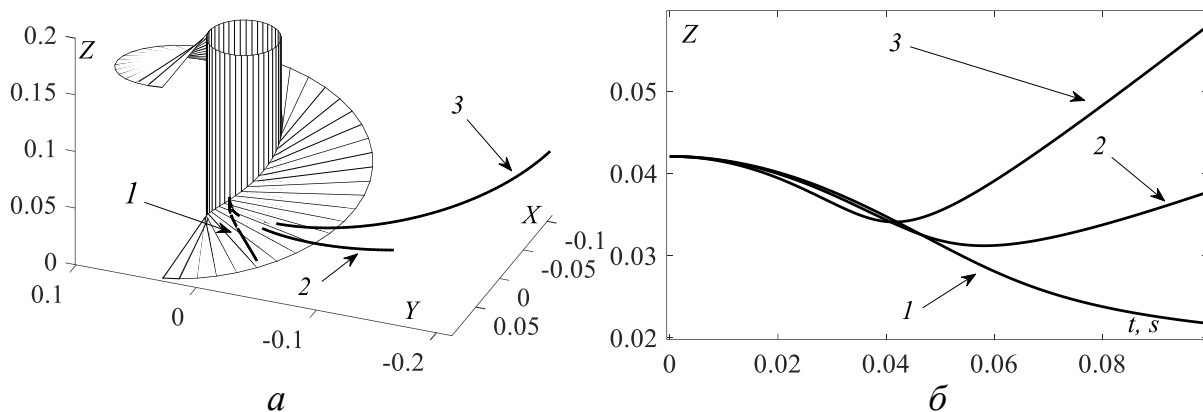


Рис. 4. Кінематичні параметри руху частинки по прямому відкритому гелікоїду для різних кутових швидкостей його обертання (1 – $\omega = 0$; 2 – $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$; 3 – $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$): а – відносна траєкторія руху частинки (траєкторія ковзання по поверхні); б – графік підйому (опускання) частинки

На рис. 5 побудовані траєкторії ковзання частинки по поверхні відкритого і закритого гелікоїдів, які обертаються із кутовою швидкістю $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$ протягом 1 с за умови, що вони не обмежені співвісною циліндричною поверхнею.

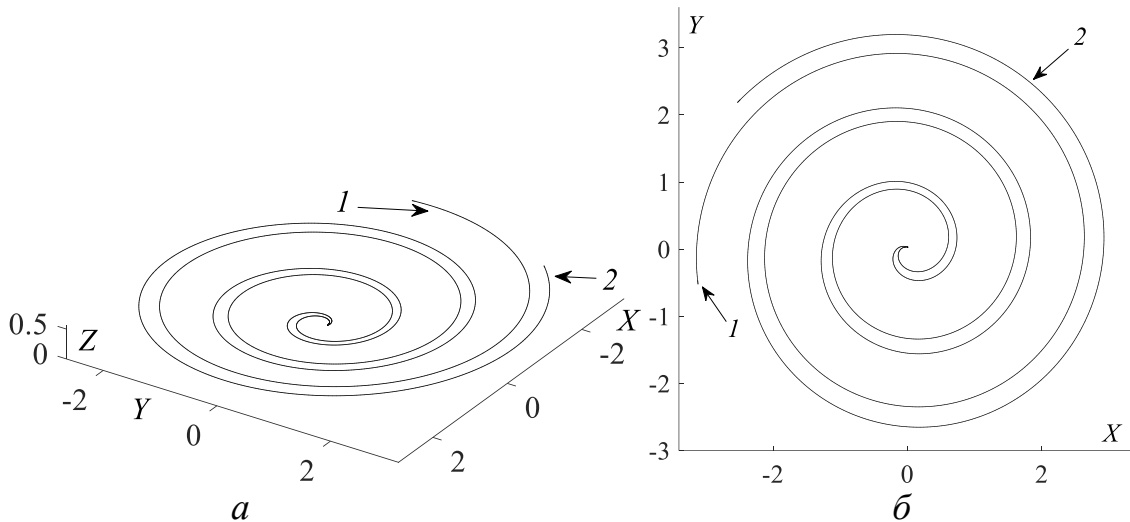


Рис. 5. Траєкторії ковзання частинки по поверхні прямих гелікоїдів, які обертаються із кутовою швидкістю $\omega = 20 \text{ c}^{-1}$ (1 – по закритому, 2 – по відкритому гелікоїдах): *a* – аксонометричне зображення; *б* – горизонтальна проєкція

Із рис. 5 можна зробити висновок, що принципової різниці в характері ковзання частинки по поверхнях закритого і відкритого гелікоїдів немає. Однак основна складова підйому частинки відбувається після її зустрічі із нерухомим циліндричним кожухом. При цьому частинка ковзає одночасно по обох поверхнях і піднімається вгору. Цей процес потребує окремих досліджень.

Висновки. Гвинтова поверхня прямого гелікоїда віднесена до параметричних рівнянь таким чином, що вони описують закритий гелікоїд при $r = 0$ або відкритий при $r \neq 0$. Встановлення зв'язку між незалежними змінними поверхні u і α у вигляді залежностей $u = u(t)$ і $\alpha = \alpha(t)$, де t – час, дозволяє перейти від рівнянь поверхні до рівнянь лінії на ній, яка приймається за траєкторію ковзання. Система диференціальних рівнянь другого порядку складається в проєкціях на осі нерухомої системи координат. Розв'язок системи здійснюється чисельними методами внаслідок чого знаходяться залежності $u = u(t)$, $\alpha = \alpha(t)$, а також реакція поверхні $N = N(t)$. Якщо кутова швидкість обертання гелікоїда дорівнює нулю, то рівняння описують ковзання частинки по нерухомій поверхні під дією сили власної ваги. При $r = 0$ і $\beta = 0$, де β – кут підйому напрямної гвинтової лінії поверхні, параметричні рівняння описують горизонтальну площину, віднесену до полярної системи координат. Відповідно диференціальні рівняння описують траєкторію ковзання частинки по горизонтальному диску, що обертається навколо вертикальної осі.

В результаті розв'язання диференціальних рівнянь чисельними методами побудовано траєкторії ковзання частинки по поверхні закритого і відкритого вертикальних гелікоїдів, які обертаються навколо власної осі. З'ясовано, що принципової різниці між траєкторіями ковзання немає. Одночасно при такому ковзанні здійснюється підйом частинки вгору. В

початковий момент частинка на закритому гелікоїду опускається вниз, а потім піднімається вгору, тому її швидкість підйому дещо менша в порівнянні із закритим гелікоїдом. Якщо гелікоїди нерухомі, частинка починає опускатися вниз по поверхні, віддаляючись від осі гелікоїда і з часом зупиняється. Пояснюється це тим, що по мірі віддалення частинки від осі поверхні зменшується кут найбільшого нахилу дотичної площини до поверхні в точці її розташування. Коли він стає меншим кута тертя, частинка після руху за інерцією зупиняється.

Література

1. Wulantuya, Wang H., Wang Ch., Qinglin (2020). Theoretical analysis and experimental study on the process of conveying agricultural fiber materials by screw conveyors. *Engenharia Agricola, Jaboticabal*, Vol. 40, No. 5, pp. 589–594. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1809-4430-Eng.Agric.v40n5p589-594/2020>.
2. Mei X., Xue Y., Zhang L. (2022). Determination of the optimal working performance matching through theoretical analysis and experimental study for a screw conveyor. *PLoS ONE*, 17(6): e0266948. DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0266948>.
3. Moelder K., Lillerand T. (2025). Design and feasibility analysis of vertical static flight screw conveyor usage in granulated fertilizer transportation. *24th International Scientific Conference Engineering for Rural Development*, pp. 423–428. DOI: <https://doi.org/10.22616/ERDev.2025.24.TF090>.
4. Pylypaka S., Volina T., Hryshchenko I., Dieniezhnikov S., Rybenko I. (2022). Mathematical model of lifting particles of technological material by vertical auger. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, pp. 112–122. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-06044-1_11.
5. Pylypaka S., Babka V., Hryshchenko I., Kresan T. (2018). Mathematical model of moving particle by vertical screw in stationary mode. *Machinery & Energetics*, Vol. 9, No. 4, pp. 31–36. DOI: <https://doi.org/10.31548/me2018.04.031>.

MATHEMATICAL MODEL OF A PARTICLE SLIDING ON THE SURFACE OF A ROTATING VERTICAL RIGHT HELICOID

Tetiana Volina, Vitalii Babka, Alla Rebrii

A right helicoid can be either open or closed depending on the method of its formation. If a straight horizontal line segment undergoes helical motion while intersecting the vertical axis, the resulting helicoid is closed and is technically known as an auger (or screw). If the segment does not intersect the axis and moves at a certain distance from it, the resulting helicoid is open. Screw conveyors typically utilize closed helicoids as standard technical helical surfaces. However, other helical surfaces may be used, which requires the creation of a corresponding model of particle motion.

The distinctive feature of this study is the development of a generalized mathematical model that describes particle motion along both types of helicoids.

This differentiates it from existing works focused on a specific surface. The obtained second-order differential equations describe the sliding trajectory of a particle on the surface. Depending on the design parameters, such a surface can be an open or closed helicoid, or a special case — the rotation of a horizontal flat disk. This approach allowed for obtaining particle motion parameters on various surfaces and comparing the results.

By solving the differential equations using numerical methods, sliding trajectories of a particle on the surfaces of closed and open vertical helicoids rotating around their own axes were constructed. It was established that there is no fundamental difference between the sliding trajectories. Simultaneously, such sliding results in the upward movement of the particle. Initially, on a closed helicoid, the particle moves downward before ascending, causing its ascent velocity to be slightly lower compared to an open helicoid. If the helicoids are stationary, the particle begins to descend along the surface, moving away from the axis, and eventually stops. The particle sliding trajectories are constructed both within the boundaries of the surface segment and under the condition that it is not constrained by a cylinder.

Keywords: right and open helicoids, trajectory, angular velocity, compound motion, differential equations.

References

1. Wulantuya, Wang, H., Wang, Ch., & Qinglin. (2020). Theoretical analysis and experimental study on the process of conveying agricultural fiber materials by screw conveyors. *Engenharia Agrícola*, 40(5), 589–594. <http://dx.doi.org/10.1590/1809-4430-Eng.Agric.v40n5p589-594/2020> [In English].
2. Mei, X., Xue, Y., & Zhang, L. (2022). Determination of the optimal working performance matching through theoretical analysis and experimental study for a screw conveyor. *PLoS ONE*, 17(6), e0266948. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0266948> [In English].
3. Moelder, K., & Lillerand, T. (2025). Design and feasibility analysis of vertical static flight screw conveyor usage in granulated fertilizer transportation. In *24th International Scientific Conference Engineering for Rural Development* (pp. 423–428). <https://doi.org/10.22616/ERDev.2025.24.TF090> [In English].
4. Pylypaka, S., Volina, T., Hryshchenko, I., Dieniezhnikov, S., & Rybenko, I. (2022). Mathematical model of lifting particles of technological material by vertical auger. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 112–122. https://doi.org/10.1007/978-3-031-06044-1_11 [In English].
5. Pylypaka, S., Babka, V., Hryshchenko, I., & Kresan, T. (2018). Mathematical model of moving particle by vertical screw in stationary mode. *Machinery & Energetics*, 9(4), 31–36. <https://doi.org/10.31548/me2018.04.031> [In English].

Матеріал надійшов до редакції 15.04.2026

Прийнято до друку 13.05.2026 р.