УДК. 514.18

ДИСКРЕТНЕ ФОРМУВАННЯ ДВОВИМІРНИХ КАРКАСІВ СУПЕРПОЗИЦІЯМИ ТРЬОХ ТОЧОК ЗА РЕКУРЕНТНИМИ УМОВАМИ

DOI: 10.33842/2313-125X-2026-29-56-63
Воронцов О.В., канд. техн. наук,
voronoleg6163@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7339-9196
Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка» (м. Полтава, Україна).
Воронцова І.В., канд. пед. наук,
ira061061@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9131-2816
Полтавський коледж нафти і газу
Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка» (м. Полтава, Україна).

У статті представлено узагальнений підхід до визначення коефіцієнтів суперпозиції для заданих планів двовимірних точкових множин. Запропонований підхід забезпечує можливість розв'язання задач суцільної дискретної інтерполяції та екстраполяції числовими послідовностями для довільних двовимірних точкових множин за трьома попередньо визначеними вузловими точками.

Дослідження спрямоване на подальший розвиток методів моделювання дискретних геометричних образів із застосуванням класичного методу кінцевих різниць, статико-геометричного підходу та геометричного апарату суперпозицій.

Основою запропонованого дослідження стали попередні результати авторів, присвячені виявленню закономірностей зміни коефіцієнтів суперпозиції трьох вузлових точок поліноміальних функцій у межах обраних розрахункових схем.

У роботі досліджено процес формування дискретних каркасів двовимірних геометричних образів за відомою величиною рекурентної залежності, із заданим рівномірним кроком у плані.

У результаті одержані рекурентні формули визначення величин коефіцієнтів суперпозиції трьох вузлових точок заданого плану каркаса дискретного геометричного образу. При умові фіксованих значень показників суперпозиції можуть бути сформовані різні дискретні каркаси на основі будь-якої розрахункової схеми.

Отримані результати дають змогу здійснювати побудову дискретних геометричних образів на основі координат трьох заданих вузлових точок у межах обраної розрахункової схеми.

Проведене дослідження формує узагальнений підхід до встановлення закономірностей зміни коефіцієнтів суперпозиції, що можуть бути *використані для обчислення аплікат довільної кількості точок під час моделювання довільних двовимірних точкових множин.*

Ключові слова: дискретне моделювання, статико-геометричний метод, геометричний апарат суперпозицій, величина рекурентної залежності, коефіцієнти суперпозиції.

Постановка проблеми. Застосування геометричного апарату суперпозицій у задачах інтерполяції суттєво розширює можливості дискретного моделювання геометричних образів.

Визначення закономірностей зміни коефіцієнтів суперпозиції та величини рекурентної залежності, що в межах статико-геометричного методу виконує роль функціонального аналога навантаження під час моделювання двовимірних точкових множин, створює підґрунтя для ефективного розв'язання задач суцільної дискретної інтерполяції та екстраполяції числовими послідовностями. Це, своєю чергою, забезпечує можливість моделювання довільних двовимірних геометричних образів, заданих через три обрані вузлові точки.

Аналіз останніх досліджень Питанням застосування для дискретного моделювання ГО геометричного апарату суперпозицій в поєднанні з класичним методом кінцевих різниць, статико-геометричним методом, математичним апаратом числових послідовностей присвячені роботи авторів даної статті [1 – 5].

Формулювання цілей статті. Метою даної статті є методика визначення коефіцієнтів суперпозиції на заданих планах двовимірних точкових множин для дискретного формування двовимірних каркасів суперпозиціями за рекурентними умовами.

Основна частина. **Твердження.** Координати будь-якої точки довільної двовимірної точкової множини можуть бути визначені шляхом суперпозиції координат трьох вибраних точок цієї множини за умови відомого значення рекурентної залежності.

Доведемо дане твердження.

Запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^{3} k_s = 1; \\ k_1(i+p_1) + k_2(i+p_2) + k_3(i+p_3) = (i+p); \\ k_1(j+m_1) + k_2(j+m_2) + k_3(j+m_3) = (j+m); \\ k_1 z_{i+p_1,j+m_1} + k_2 z_{i+p_2,j+m_2} + k_3 z_{i+p_3,j+m_3} + P_{i+p,j+m} = z_{i+p,j+m}, \end{cases} \qquad (1)$$

де невідомими величинами будуть k_1, k_2, k_3, $z_{i+p,j+m}$.

Дана система містить чотири рівняння і чотири невідомі величини, тому повинна мати розв'язок.

У результаті розв'язання системи (1) одержимо наступні вирази для визначення величин коефіцієнтів суперпозиції заданих вузлових точок дискретного каркаса та координати z шуканої точки:

$$k_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{m_2p_3 - mp_3 - m_3p_2 + mp_2 + m_3p - m_2p}{m_2p_3 - m_1p_3 - m_3p_2 + m_1p_2 + m_3p_1 - m_2p_1};$$

$$k_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-m_1p_3+mp_3+m_3p_1-mp_1-m_3p+m_1p}{m_2p_3-m_1p_3-m_3p_2+m_1p_2+m_3p_1-m_2p_1}; \quad (2)$$

$$k_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{m_1p_2-mp_2-m_2p_1+mp_1+m_2p-m_1p}{m_2p_3-m_1p_3-m_3p_2+m_1p_2+m_3p_1-m_2p_1};$$

$$\begin{aligned}
&z_{i+p,j+m} = \Delta_4/\Delta = \\
&\big(m_1p_2z_{i+p_3,j+m_3} - mp_2z_{i+p_3,j+m_3} - m_2p_1z_{i+p_3,j+m_3} + \\
&+mp_1z_{i+p_3,j+m_3} + m_2pz_{i+p_3,j+m_3} - m_1pz_{i+p_3,j+m_3} - m_1p_3z_{i+p_2,j+m_2} + \\
&+mp_3z_{i+p_2,j+m_2} + m_2p_3z_{i+p_1,j+m_1} - mp_3z_{i+p_1,j+m_1} + m_2p_3P_{i+p,j+m} - \\
&-m_1p_3P_{i+p,j+m} + m_3p_1z_{i+p_2,j+m_2} - mp_1z_{i+p_2,j+m_2} - m_3pz_{i+p_2,j+m_2} + \\
&+m_1pz_{i+p_2,j+m_2} - m_3p_2z_{i+p_1,j+m_1} + mp_2z_{i+p_1,j+m_1} - m_3p_2P_{i+p,j+m} + \\
&+m_1p_2P_{i+p,j+m} + m_3pz_{i+p_1,j+m_1} - m_2pz_{i+p_1,j+m_1} + m_3p_1P_{i+p,j+m} - \\
&-m_2p_1P_{i+p,j+m}\big)/ \\
&/m_2p_3 - m_1p_3 - m_3p_2 + m_1p_2 + m_3p_1 - m_2p_1 . \quad (3)
\end{aligned}$$

Якщо невідомими величинами будуть k_1, k_2, k_3, $P_{i+p,j+m}$, то вирази для визначення величин коефіцієнтів суперпозиції заданих вузлових точок дискретного каркаса та величини рекурентної залежності $P_{i+p,j+m}$ матимуть вигляд:

$$k_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{(m_2-m)p_3+(m-m_3)p_2+(m_3-m_2)p}{(m_2-m_1)p_3+(m_1-m_3)p_2+(m_3-m_2)p_1};$$

$$k_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{(m_1-m)p_3+(m-m_3)p_1+(m_3-m_1)p}{(m_2-m_1)p_3+(m_1-m_3)p_2+(m_3-m_2)p_1}; \quad (4)$$

$$k_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{(m_1-m)p_2+(m-m_2)p_1+(m_2-m_1)p}{(m_2-m_1)p_3+(m_1-m_3)p_2+(m_3-m_2)p_1};$$

$$\begin{aligned}
&P_{i+p,j+m} = \Delta_4/\Delta = \\
&\Big(\big((m_1-m)p_2 + (m-m_2)p_1 + (m_2-m_1)p\big)z_{i+p_3,j+m_3} + \\
&+\Big((m-m_1)z_{i+p_2,j+m_2} + (m_2-m)z_{i+p_1,j+m_1} + (m_1-m_2)z_{i+p,j+m}\Big)p_3 + \\
&+\big((m_3-m)p_1 + (m_1-m_3)p\big)z_{i+p_2,j+m_2} + \Big((m-m_3)z_{i+p_1,j+m_1} + \\
&+(m_3-m_1)z_{i+p,j+m}\Big)\Big)p_2 + (m_3-m_2)pz_{i+p_1,j+m_1} + \\
&+(m_2-m_3)z_{i+p,j+m}p_1\big)/ \\
&/\big((m_2-m_1)p_3 + (m_1-m_3)p_2 + (m_3-m_2)p_1\big) . \quad (5)
\end{aligned}$$

Таким чином, система рівнянь (1) має розв'язок, що доводить вірність Твердження.

Також, згідно доведеного твердження рекурентна формула для визначення координат будь-якої двовимірної множини точок може бути представлена у вигляді:

$$z_{i,j} = k_1z_{i-1,j} + k_2z_{i+1,j} + k_1z_{i,j-1} - P_{i,j} . \quad (6)$$

Визначимо вирази для обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції.

$$\begin{aligned}
&z_{i,j} = k_1z_{i-1,j} + k_2z_{i+1,j} + k_1z_{i,j-1} - P_{i,j} = \\
&= k_1\big(z_{i-1,j} + z_{i,j-1}\big) + (1-k_1)z_{i+1,j} - P_{i,j} = \\
&= k_1z_{i-1,j} + k_1z_{i,j-1} + z_{i+1,j} - k_1z_{i+1,j} - P_{i,j} = \\
&= k_1\big(z_{i-1,j} + z_{i,j-1} - z_{i+1,j}\big) + z_{i+1,j} - P_{i,j} .
\end{aligned}$$

Звідси:

$$k_1 = \frac{z_{i,j} - z_{i+1,j} + P_{i,j}}{z_{i-1,j} + z_{i,j-1} - z_{i+1,j}} . \quad (7)$$

Відповідно:

$$k_2 = 1 - k_1 = \frac{z_{i-1,j} + z_{i,j-1} - z_{i,j} - P_{i,j}}{z_{i-1,j} + z_{i,j-1} - z_{i+1,j}} .$$

Для довільних вузлових точок, рекурентна формула (6) матиме вигляд:

$$z_{i+p,j+m} = k_1 z_{i+p_1,j+m} + k_2 z_{i+p_2,j+m} + k_1 z_{i+p,j+m_1} - P_{i+p,j+m} , \quad (8)$$

де p, p_1, m, m_1, – величини заданих кроків, відповідно по напрямах i та j.
А формула (7), відповідно, матиме наступний вигляд

$$k_1 = \frac{z_{i+p,j+m} - z_{i+p_2,j+m} + P_{i+p,j+m}}{z_{i+p_1,j+m} + z_{i+p,j+m_1} - z_{i+p_2,j+m}} , \; k_2 = 1 - k_1 . \quad (9)$$

Відповідно:

$$k_2 = 1 - k_1 = \frac{z_{i+p_1,j+m} + z_{i+p,j+m_1} - z_{i+p,j+m} - P_{i+p,j+m}}{z_{i+p_1,j+m} + z_{i+p,j+m_1} - z_{i+p_2,j+m}} .$$

У самому загальному випадку, рекурентну формулу (6) можна записати у вигляді:

$$z_{i+p,j+m} = k_1 z_{i+p_1,j+m_1} + k_2 z_{i+p_2,j+m_2} + k_1 z_{i+p_3,j+m_3} - P_{i,j} , \quad (10)$$

де p, p_1, p_2, p_3, m, m_1, m_2, m_3 – величини заданих кроків, відповідно по напрямах i та j .
А формула (7), відповідно, матиме наступний вигляд

$$k_1 = \frac{z_{i+p,j+m} - z_{i+p_2,j+m_2} + P_{i+p,j+m}}{z_{i+p_1,j+m_1} + z_{i+p_3,j+m_3} - z_{i+p_2,j+m_2}} , \; k_2 = 1 - k_1 . \quad (11)$$

Відповідно:

$$k_2 = 1 - k_1 = \frac{z_{i+p_1,j+m_1} + z_{i+p_3,j+m_3} - z_{i+p,j+m} - P_{i+p,j+m}}{z_{i+p_1,j+m_1} + z_{i+p_3,j+m_3} - z_{i+p_2,j+m_2}} .$$

Розглянемо приклад застосування геометричного апарату суперпозицій для дискретного формування точкових каркасів поверхонь за відповідними вихідними умовами із урахуванням величини рекурентної залежності.

План сітки із відповідною нумерацією вузлів показано на рис. 1.

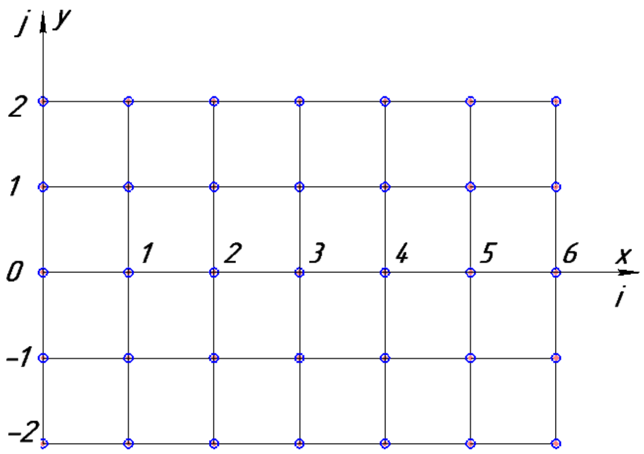

Рис. 1. План дискретного каркасу поверхні.

Для визначення величин коефіцієнтів суперпозиції та величини рекурентної залежності $P_{i+p,j+m}$ методом суперпозицій, треба розв'язати систему рівнянь (1).

Із заданих вихідних умов (рис. 1), при відомій стрілі підйому оболонки, необхідно мати координати лише будь-яких трьох контурних вузлів, або двох контурних і центрального вузла.

Величини коефіцієнтів суперпозиції заданих трьох вузлових точок будуть визначені із системи рівнянь (1) за формулами (4), а величина рекурентної залежності $P_{i+p,j+m}$ – за формулами (5).

Аплікати $z_{i+p,j+m}$ будь-якого вузла того ж самого каркасу при відомій величині рекурентної залежності $P_{i+p,j+m}$ будуть визначені із системи рівнянь (1) за формулами (3), а величини коефіцієнтів суперпозиції заданих трьох вузлових точок – за формулами (4).

На рис. 2 та 3 графічно представлені результати розрахунку аплікат невідомих внутрішніх вузлів для різних значень аплікат центрального вузла.

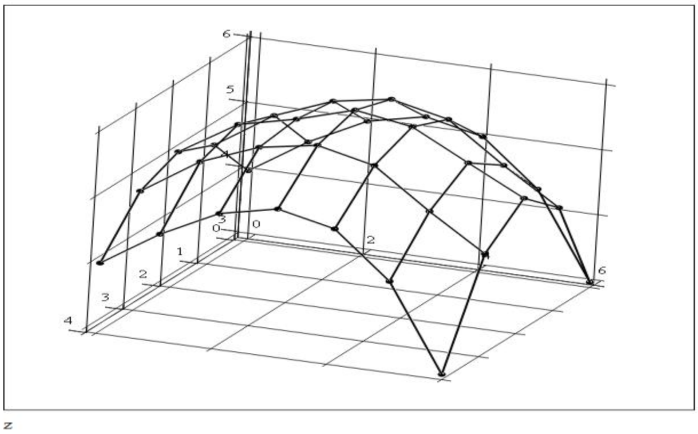

Рис. 2. Значення аплікат z_{ij} точок дискретного каркасу поверхні при $z_{30}=6$

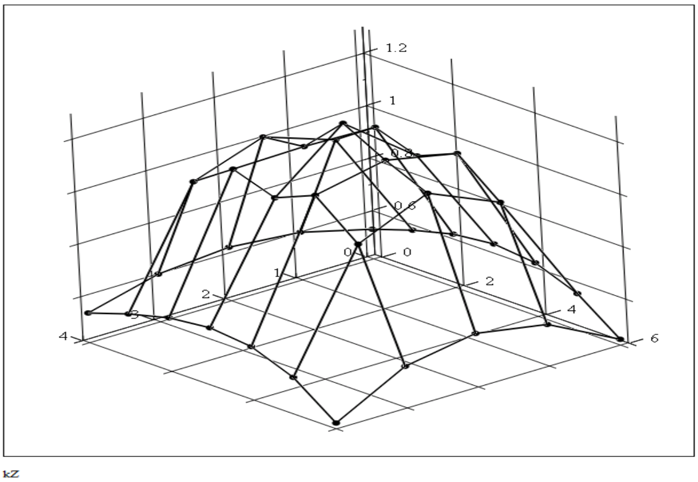

Рис. 3. Значення аплікат z_{ij} точок дискретного каркасу поверхні при $z_{30}=12$

Висновки. У статті розроблено алгоритм визначення дискретних значень коефіцієнтів суперпозиції трьох заданих вузлових точок для формування двовимірних дискретних геометричних образів.

При умові фіксованих значень показників суперпозиції, що визначені за формулами (2), або (4), можуть бути сформовані різні дискретні каркаси на основі будь-якої розрахункової схеми.

Запропонований підхід забезпечує можливість формування ДГО відповідно до обраної розрахункової схеми.

Таким чином запропоновано спосіб дискретного моделювання двовимірних ДГО з урахуванням заданого параметра рекурентної залежності $\boldsymbol{P}$ та обраної розрахункової моделі.

Перспективи подальших досліджень. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на визначення закономірностей зміни величин коефіцієнтів суперпозиції від зміни аплікат трьох опорних вузлів або зміни величини рекурентної залежності.

Література

1. Воронцов, О.В., Воронцова І.В. Визначення величин коефіцієнтів суперпозиції координат чотирьох точок на прикладі поліномів двох змінних. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. К.: КНУБА, 2024. Вип. 106. С. 67-81. https://doi.org/10.32347/0131-579x.2024.106
2. Воронцов, О.В., Воронцова І.В. Залежності величини скінченної різниці та величин коефіцієнтів суперпозиції при формуванні одновимірних геометричних образів. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. К.: КНУБА, 2023. Вип. 105. С. 62-80. https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.105
3. Воронцов, О.В., Воронцова І.В. Формування одновимірних геометричних образів суперпозиціями точкових множин за даними крайовими умовами і величиною скінченої різниці. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. К.: КНУБА, 2023. Вип. 104. С. 59-79. https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.104.59-79
4. Воронцов О.В., Воронцова І.В. Дослідження закономірностей зміни величин коефіцієнтів суперпозиції одновимірних функціональних залежностей на прикладі поліноміальних функцій. *Сучасні проблеми моделювання*. Мелітополь: МДПУ, 2021. Випуск 21. С. 74-82. https://doi.org/10.33842/22195203/2021/21/74/82
5. Воронцов О.В., Воронцова І.В. Закономірності зміни величин коефіцієнтів суперпозиції у процесі інтерполяції гіперболічними функціями. *Прикладні питання математичного моделювання*. Херсон: ХНТУ, Т.4, №1. 2021. С. 59 – 66. https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.6

DISCRETE FORMATION OF TWO-DIMENSIONAL FRAMEWORKS USING THREE-POINT SUPERPOSITIONS UNDER RECURRENT CONDITIONS

Oleg Vorontsov, Irina Vorontsova

This paper presents a generalized approach to determining superposition coefficients for predefined layouts of two-dimensional point sets. The proposed approach provides the possibility of solving problems of continuous discrete interpolation and extrapolation by numerical sequences for arbitrary two-dimensional point sets using three preassigned nodal points.

The study is aimed at the further development of methods for modeling discrete geometric forms through the application of the classical finite difference method, the static-geometric approach, and the geometric apparatus of superpositions.

The research is based on the authors' previous results devoted to identifying patterns in the variation of superposition coefficients of three nodal points of polynomial functions within selected computational schemes.

The paper investigates the process of forming discrete frameworks of two-dimensional geometric forms based on a known value of a recurrent relation with a specified uniform step in plan.

As a result, recurrent formulas were obtained for determining the values of the superposition coefficients of three nodal points of a given framework layout of a discrete geometric form. Under the condition of fixed values of the superposition parameters, different discrete frameworks may be formed on the basis of any computational scheme.

The obtained results make it possible to construct discrete geometric forms based on the coordinates of three given nodal points within a selected computational scheme.

The conducted research establishes a generalized approach to identifying patterns in the variation of superposition coefficients, which may be used to calculate the applicates of an arbitrary number of points in the modeling of arbitrary two-dimensional point sets.

Keywords: discrete modeling, static-geometric method, geometric apparatus of superpositions, recurrent relation value, superposition coefficients.

References

1. Vorontsov, O. V., & Vorontsova, I. V. (2024). Determination of the values of

coordinate superposition coefficients for four points using the example of polynomials of two variables. Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika, 106, 67–81. Kyiv: KNUBA. https://doi.org/10.32347/0131-579x.2024.106 [In Ukrainian].

2. Vorontsov, O. V., & Vorontsova, I. V. (2023). Dependence of finite difference values and superposition coefficients in the formation of one-dimensional geometric images. Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika, 105, 62–80. Kyiv: KNUBA. https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.105 [In Ukrainian].
3. Vorontsov, O. V., & Vorontsova, I. V. (2023). Formation of one-dimensional geometric images by superpositions of point sets under given boundary conditions and finite difference values. Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika, 104, 59–79. Kyiv: KNUBA. https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.104.59-79 [In Ukrainian].
4. Vorontsov, O. V., & Vorontsova, I. V. (2021). Investigation of regularities in the variation of superposition coefficients of one-dimensional functional dependencies using polynomial functions as an example. Suchasni problemy modeliuvannia, 21, 74–82. Melitopol: MDPU. https://doi.org/10.33842/22195203/2021/21/74/82 [In Ukrainian].
5. Vorontsov, O. V., & Vorontsova, I. V. (2021). Regularities in the variation of superposition coefficients in the process of interpolation by hyperbolic functions. Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia, 4(1), 59–66. Kherson: KhNTU. https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.6 [In Ukrainian].

Матеріал надійшов до редакції 26. 04. 2026

Прийнято до друку 13. 05. 2026 р.