

УДК 514.182

## ПРО ОДИН СПОСІБ ВИЗНАЧЕННЯ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ПОБУДОВИ МОДЕЛІ ЧЕБИШЕВСЬКОЇ СІТКИ НА НЕРОЗГОРТНИХ ЛІНІЙЧАСТИХ ПОВЕРХНЯХ

DOI: 10.33842/2313-125X-2026-29-94-100

Залевський С.В., канд. техн. наук,

[zalsergkpi@gmail.com](mailto:zalsergkpi@gmail.com), ORCID 0000-0002-7411-1462

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», (м. Київ, Україна)

*У статті розглянуто спосіб побудови геодезичної лінії на відсіку нерозгортної лінійчастій поверхні. Першу точку кривої запропоновано вибрати на границі відсіку поверхні. Початковий напрямок побудови визначається вектором, розташованим в площині, дотичній до поверхні в першій точці.*

*Побудована геодезична розглядається як початкова лінія першого сімейства кривих сітки Чебишева.*

*Оскільки при одяганні поверхні тканиною з сітчастою структурою її нитки при накладенні на поверхню укладаються по лініях чебишевської сітки то пропонується вибрати крок побудови точок кривої з урахуванням властивостей як самої поверхні так і одягаємої тканини. Вибір максимально допустимої величини кроку дозволяє мінімізувати кількість побудов, забезпечивши при цьому відсутність утворення складок.*

*Для знаходження точок першої геодезичної запропоновано спосіб послідовного перепроєкціювання, оснований на властивості паралельного перенесення векторів на поверхні, згідно якій при такому перенесенні на поверхні уздовж кривої двох векторів які виходять із однієї точки  $M_i$  і належать поверхні в близьку точку  $M_{i+1}$ , довжини векторів і кут між ними не змінюються. Побудова геодезичної закінчується при виході на границю заданого відсіку лінійчастій поверхні.*

*Для вибору першого напрямного вектору  $\vec{a}_0$  другого сімейства ліній сітки пропонується використати лінію перетину площини, дотичної до поверхні в першій точці кривої, що розташована на границі відсіку і нормальної площини, яка задається вектором нормалі до поверхні і початковим напрямом кривої. Побудову наступних напрямів векторів  $\vec{a}_i$  пропонується реалізувати за допомогою алгоритму в якому побудована геодезична крива розглядається як лінія стрікції лінійчастій поверхні, яка задана сімейством напрямних векторів  $\vec{a}_i$ . Такий підхід дозволяє за допомогою відносно малої кількості обчислень отримати початкові умови для побудови моделі чебишевської сітки на відсіку нерозгортної лінійчастій поверхні.*

*Ключові слова: геодезична лінія; чебишевська сітка; геодезично*

*паралельний перенос вектора на поверхні; одягання поверхні тканиною на сітчастій основі; довжина чарунки моделі чебишевської сітки; лінія стрікції.*

**Постановка проблеми.** Сучасні технології які застосовуються в літакобудуванні включають все більш широке використання композитних матеріалів на тканинній основі. Одягання такого матеріалу на задану поверхню відбувається за рахунок деформації чотирикутників, утворених волокнами тканини. Оскільки міцність такого матеріалу суттєво відрізняється в різних напрямках стосовно розташування волокон то важливим постає питання розміщення тканини на поверхні. Актуальним постає питання побудови сіток Чебишева, які моделюють розташування па поверхні ниток основи і утку тканини.

Так як аналітична розв'язок задачі для довільних нерозгортних поверхонь неможливий то постає необхідність створення способів наближеної побудови моделі сітки, основаних на її властивостях.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** В роботі [8] запропоновано графо-аналітичний метод побудови геодезичних на поверхні обертання загального вигляду. Застосовано метод побудови розгортки з використанням інтегрального числення. Розглянуто побудову наближеної геодезичні лінії на поверхнях параболоїду обертання і катеноїду.

Дослідженню використання геодезичних ліній присвячена робота [9] в якій розглянуто вирішення двох практичних завдань: армування оболонок та опис руху матеріальної точки по поверхні за інерцією.

У роботі [10] розглянуто питання знаходження геодезичної лінії, якщо відома початкова точка та початковий напрямок. Результат знаходиться шляхом розв'язання системи диференціальних рівнянь другого порядку для геодезичних ліній.

В статті [11] геодезична лінія розглядається як топологічний інваріант сім'ї поверхонь типу Клейна. Сформульовано систему початкових умов параметрів та їх похідних, визначено межі зміни параметра та кількість точок лінії геодезичної. Наведено анімаційна візуалізація геодезичної на заданій поверхні в залежності від значень вхідних параметрів.

У більшості робіт процес побудови геодезичної на поверхні і , як наслідок, моделі сітки Чебишева розглядається переважно з позиції математичного розв'язання задачі, що значно обмежує можливість застосування такого підходу для складних поверхонь.

Таким чином питання практичної побудови моделі чебишевської сітки на складних нерозгортних поверхнях залишається недостатньо дослідженим.

**Формулювання цілей.** Запропонувати алгоритм побудови геодезичної лінії на відсіку лінійчастої поверхні за заданим початковим напрямком; знаходження напрямних векторів другого сімейства ліній чебишевської сітки.

**Основна частина.** Нитка тканини, накладена на поверхню буде знаходитись у стані рівноваги якщо вона розташована вздовж геодезичної лінії цієї поверхні. Звідси для моделювання положення сітки на поверхні при відомому початковому напрямку першої лінії необхідно побудувати геодезичну криву.

Розглянемо відсік лінійчастої поверхні  $F$  на якому задана точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  яка належить даній поверхні та початковий вектор  $\vec{t}(l_{t0}, m_{t0}, n_{t0})$ , розташований в площині, дотичній до поверхні в точці  $M_0$  (Рис. 1). Для побудови геодезичної лінії – лінії основи скористаємося тим що дотична, паралельно перенесена вздовж геодезичної лінії залишається дотичною. Вектор нормалі до поверхні  $F$  в точці  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  має координати  $\vec{n}(l_{n0}, m_{n0}, n_{n0})$ .

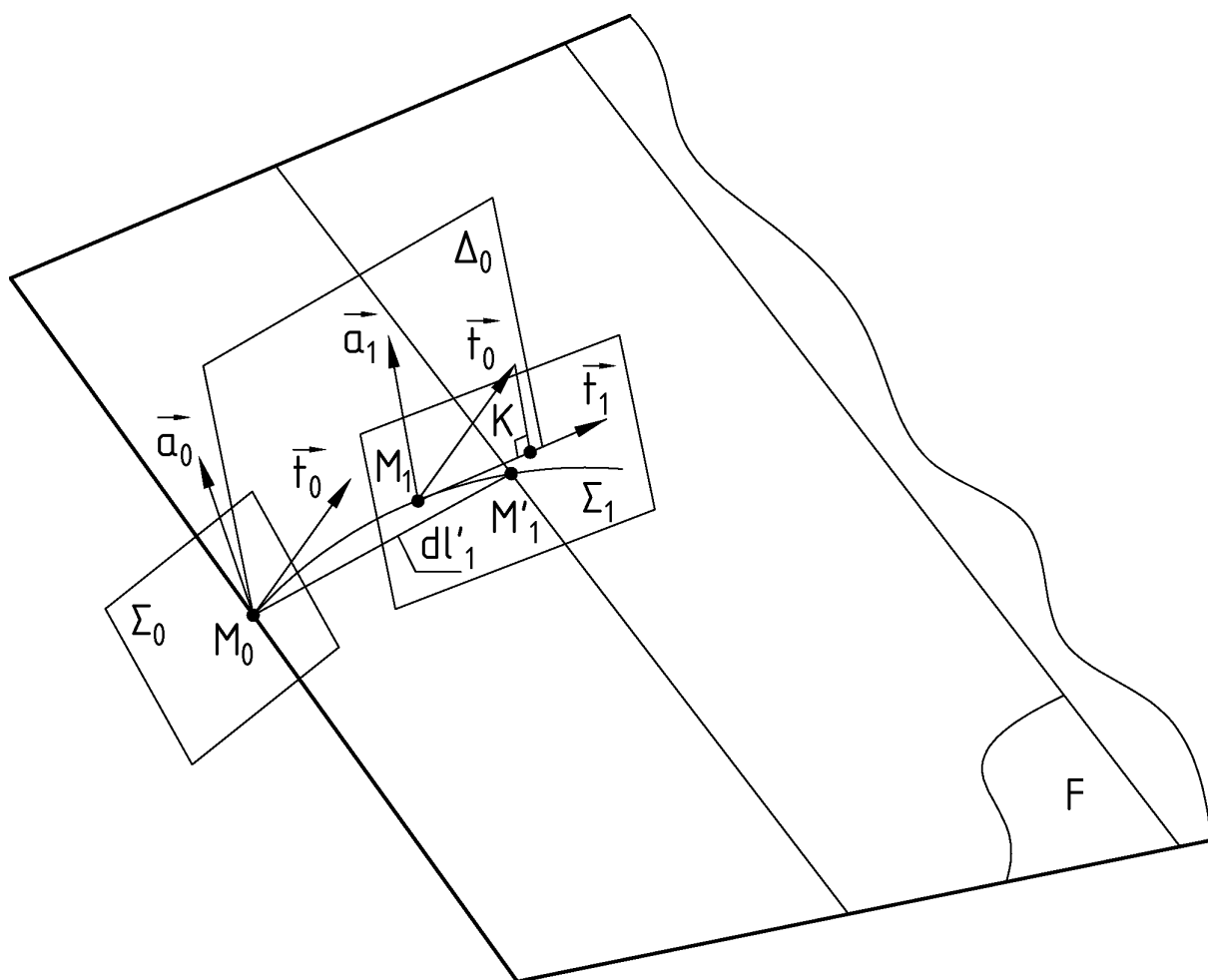


Рис.1 Побудова за заданим напрямком геодезичної лінії та знаходження початкових напрямків другого сімейства ліній чебишевської сітки

Тоді нормальна площина  $\Sigma_0$  у заданому напрямку визначається рівнянням:

$$a_n x + b_n y + c_n z + d_n = 0$$

де  $a_n = m_n n_t - m_t n_n$ ,  $b_n = n_n l_t - n_t l_n$ ,  $c_n = l_n m_t - l_t m_n$ ,  $d_n = -(x_0 a_n + y_0 b_n + z_0 c_n)$

Знаходимо точку перетину нормальної площини з твірною лінійчастої поверхні  $M'_1(x'_1, y'_1, z'_1)$ .

Для зменшення кількості побудов потрібно вибрати максимально припустиму довжину сторони чарунки а оскільки модель чебишевської сітки має бути наближеною до положення ниток композитної тканини то потрібно врахувати властивості самої тканини.

Для знаходження наступної точки цієї лінії скористаємося формулою [3]:

$$L = 2R_{кр} \cdot \cos \frac{\alpha_{кр}}{2},$$

де  $\alpha_{кр}$  – гранично допустиме значення кута між нитками основи та утоку тканини,  $R_{кр}$  мінімальний радіус кривини.

Знаходимо відстань між точкою  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  і знайденою  $M'_1(x'_1, y'_1, z'_1)$ :

$$dl'_1 = \sqrt{(x'_1 - x_0)^2 + (y'_1 - y_0)^2 + (z'_1 - z_0)^2}.$$

Плоску криву, одержану як результат перетину площиною  $\Sigma_0$  поверхні апроксимуємо параболою з вертикальною віссю. За допомогою методу 4 $\Delta$  [2] відкладаємо на кривій задану довжину  $L$  сторони чарунки сітки і отримуємо другу точку лінії основи - першої геодезичної  $\gamma$  моделі чебишевської сітки.

Для знаходження вектора  $\overrightarrow{t_1(l_{t1}, m_{t1}, n_{t1})}$ , геодезично паралельно перенесеного в точку  $M_1$  із точки  $M_0$  скористаємося тим що його абсолютний диференціал в точках кривої дорівнює нулю. Це означає що його проекція на площину дотичну до поверхні в точці  $M_0$  паралельна вектору  $\vec{t}_0$ .

Побудуємо в точці  $M_1$  площину паралельну дотичній  $\Sigma_0$  і відкладемо в ній вектор  $\vec{t}_0$ . Знайдемо площину  $\Sigma_1$  дотичну до поверхні в точці  $M_1$ . Спроеціюємо кінець вектора  $\vec{t}_0$  на площину  $\Sigma_1$ . Отримана точка разом з точкою  $M_1$  визначить напрям нового положення вектора  $\vec{t}_1$ . Процес продовжуємо до перетину побудованої геодезичної з границею заданого відсіку лінійчастої поверхні.

Початковий напрямок другого сімейства ліній сітки визначається як вектор  $\overrightarrow{a_0(l_{a0}, m_{a0}, n_{a0})}$  Перпендикулярний нормальній площині  $\Delta_0$  в точці  $M_0$ . Геодезично паралельний перенос вектора  $\vec{a}$  вздовж географічної кривої  $\gamma$  виконуємо згідно з алгоритмом наведеним в роботі [7] де побудована геодезична є лінією стрікції (горловою) лінійчастої поверхні, заданої цим сімейством напрямків.

Запропонований алгоритм дозволяє за заданим початковим напрямом побудувати геодезичну лінію і отримати початкові напрямки другого сімейства ліній чебишевської сітки.

**Висновки.** Запропоновано алгоритм побудови геодезичної лінії (нитки основи) від заданої точки на відсіку нерозгортної лінійчастої поверхні в напрямку, заданому вектором, розташованим в площині, дотичній до поверхні. Наведено спосіб визначення початкового вектора напрямних другого сімейства ліній чебишевської сітки та знаходження початкових напрямків всіх ліній ниток утоку.

Таким чином запропоновано алгоритм створення початкових умов для практичної побудови модельної сітки Чебишева на нерозгортній лінійчастій поверхні. Це дає можливість побудови викрійок з листових композитних матеріалів для одягання поверхонь складних геометричних форм.

### *Література*

1. Ванін В.В. Побудова на поверхні лінії заданої геодезичної кривини // Прикладна геометрія та інженерна графіка. К.: КІБІ, 1993. Вип. 54. С. 54-57.
2. Ванін В.В., Залевський В.Й. Побудова геодезичних ліній на поверхні // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Київ: КДТУБА, 1994. Вип. 56. С. 56–57.
3. Ванін В.В., Залевський С.В. Вибір довжини сторони чарунки сітки Чебишева в залежності від властивостей тканини і поверхні. // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Київ: КНУБА. 2008. Вип. 79. С. 16 –19.
4. Ванін В. В., Залевський С. В., Голова О. О., Грубич М. В., Лазарчук-Воробійова Ю. В. Про один спосіб побудови чебишевської сітки на поверхні // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету, Том 24(1), С. 195-201. <https://doi.org/10.32782/2078-0877-2024-24-1-14>
5. Залевський С. В. Геометричне моделювання тканинних наповнювачів текстолітових конструкцій технічних виробів : автореф дис ... канд. техн. наук: Київ: КНУБА, 2011. 23 с.
6. Залевський С.В. , Мацулевич О.Є, Мацулевич А.Е, Литвиненко П.Л Оцінка точності моделювання сіткою Чебишева поверхні, заданої упорядкованим каркасом точок. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ: КНУБА. 2014. Вип. 4, т. 58. С. 71–74.
7. Залевський С.В., Пелеванюк І.Д. Геодезично-паралельне перенесення вектору вздовж кривої на поверхні. *Сучасні проблеми моделювання*. Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького 2020, Вип. 19. С. 65–69. DOI: <https://doi.org/10.33842/2313-125X/2019/19/65/69>
8. Ковальова Г.В., Калінін О.О., Калініна Т.О., Нікітенко О.А. Наближена побудова геодезичних ліній на поверхнях обертання. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2020. Том 3 № 2.2. С. 156–164. DOI: <https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2>
9. Кремець Я. С. Геодезичні лінії поверхонь в задачах армування оболонок та інерційного руху матеріальної точки : автореф. дис. ... канд. техн. наук. Дніпро, 2017. 25 с.
10. Табакова, І. С. Побудова геодезичної лінії гладкої поверхні, що виходить

із даної точки у заданому напрямку // Науковий вісник Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького. Математика. Геометрія. Інформатика. – Мелітополь : МДПУ, 2014. Т. 1. С. 217–225.

11. Табакова І.С., Трунова Т.О. Побудова геодезичних ліній на односторонніх поверхнях типу пляшки Клейна. *Біоніка інтелекту*. Харків: ХНУРЕ 2016. №1 (86). С.108-111.

## **ON A METHOD OF DETERMINING INITIAL CONDITIONS FOR CONSTRUCTING A CHEBYSHEV NETWORK MODEL ON NON- DEVELOPABLE LINEAR SURFACES**

Serhiy Zalevsky

*The article considers a method for constructing a geodesic line on a section of a non-expandable ruled surface. The first point of the curve is proposed to be chosen on the boundary of the surface section. The initial direction of construction is determined by a vector located in the plane tangent to the surface at the first point. The constructed geodesic is considered as the initial line of the first family of Chebyshev grid curves. Since when dressing a surface with a fabric with a mesh structure, its threads when applied to the surface are laid along the lines of the Chebyshev grid, it is proposed to choose the step of constructing the curve points taking into account the properties of both the surface itself and the fabric being dressed. Choosing the maximum permissible step size allows minimizing the number of constructions, while ensuring the absence of folds.*

*To find the points of the first geodesic, a method of sequential reprojection is proposed, based on the property of parallel transfer of vectors on the surface, according to which, with such transfer on the surface along the curve of two vectors that originate from one point  $M_i$  and belong to the surface to a nearby point  $M_{i+1}$ , the lengths of the vectors and the angle between them do not change. The construction of the geodesic ends when reaching the boundary of a given compartment of the lined surface. To select the first direction vector  $(a_0) \vec{\phantom{a}}$  of the second family of grid lines, it is proposed to use the line of intersection of the plane tangent to the surface at the first point of the curve located on the boundary of the compartment and the normal plane, which is given by the normal vector to the surface and the initial direction of the curve. The construction of the following directions of vectors  $(a_i) \vec{\phantom{a}}$  is proposed to be implemented using an algorithm in which the constructed geodesic curve is considered as a striction line of a lined surface, which is given by the family of direction vectors  $(a_i) \vec{\phantom{a}}$ . This approach allows, with the help of a relatively small number of calculations, to obtain the initial conditions for constructing a Chebyshev grid model on a section of an unexpanded lined surface.*

*Keywords: geodesic line; Chebyshev grid; geodesically parallel vector transfer on a surface; surface dressing with a fabric on a mesh base; cell length of the Chebyshev grid model; striction line.*

### *References*

1. Vanin, V. V. (1993). Construction of a line with prescribed geodesic curvature on a surface. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*, 54, 54–57. Kyiv: KIBI. [In Ukrainian].
2. Vanin, V. V., & Zalevskiy, V. Y. (1994). Construction of geodesic lines on a surface. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*, 56, 56–57. Kyiv: KDTUBA. [In Ukrainian].
3. Vanin, V. V., & Zalevskiy, S. V. (2008). Selection of the Chebyshev mesh cell side length depending on fabric and surface properties. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*, 79, 16–19. Kyiv: KNUBA. [In Ukrainian].
4. Vanin, V. V., Zalevskiy, S. V., Holova, O. O., Hrubykh, M. V., & Lazarchuk-Vorobiova, Yu. V. (2024). On a method for constructing a Chebyshev mesh on a surface. *Pratsi Tavriiskoho derzhavnoho ahrotekhnolohichnoho universytetu*, 24(1), 195–201. <https://doi.org/10.32782/2078-0877-2024-24-1-14> [In Ukrainian].
5. Zalevskiy, S. V. (2011). Geometric modeling of fabric reinforcements for textolite structures of technical products. Extended abstract of PhD dissertation. Kyiv: KNUBA, 23 p. [In Ukrainian].
6. Zalevskiy, S. V., Matsulevych, O. Ye., Matsulevych, A. E., & Lytvynenko, P. L. (2014). Accuracy assessment of surface modeling by a Chebyshev mesh defined by an ordered framework of points. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*, 58(4), 71–74. Kyiv: KNUBA. [In Ukrainian].
7. Zalevskiy, S. V., & Pelevaniuk, I. D. (2020). Geodesic-parallel transport of a vector along a curve on a surface. *Suchasni problemy modeliuвання*, 19, 65–69. Melitopol: MDPU im. B. Khmelnytskoho. <https://doi.org/10.33842/2313-125X/2019/19/65/69> [In Ukrainian].
8. Kovalova, H. V., Kalinin, O. O., Kalinina, T. O., & Nikitenko, O. A. (2020). Approximate construction of geodesic lines on surfaces of revolution. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuвання*, 3(2.2), 156–164. <https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2> [In Ukrainian].
9. Kremets, Ya. S. (2017). Geodesic lines of surfaces in problems of shell reinforcement and inertial motion of a material point. Extended abstract of PhD dissertation. Dnipro, 25 p. [In Ukrainian].
10. Tabakova, I. S. (2014). Construction of a geodesic line on a smooth surface originating from a given point in a specified direction. *Naukovyi visnyk Melitopolskoho derzhavnoho pedahohichnoho universytetu imeni Bohdana Khmelnytskoho. Matematyka. Heometriia. Informatyka*, 1, 217–225. Melitopol: MDPU. [In Ukrainian].
11. Tabakova, I. S., & Trunova, T. O. (2016). Construction of geodesic lines on one-sided Klein bottle surfaces. *Bionika intelektu*, 1(86), 108–111. Kharkiv: KhNURE. [In Ukrainian].

*Матеріал надійшов до редакції 20.04.2026*

*Прийнято до друку 13.05.2026 р.*