

УДК 62-50:514

ІНВАРІАНТНА ГЕОМЕТРИЧНА СТРУКТУРА ПРОЦЕСУ ІНЖЕНЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

DOI: 10.33842/2313-125X-2026-29-159-167

Колосова О.П., канд. техн. наук,

mrselkolosova@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7795-6412

Шепель Г.С.,

h.shepel@kpi.ua, ORCID: 0000-0002-6993-5045*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», (м. Київ, Україна)*

У статті інженерне моделювання розглянуто як процес побудови моделей технічних об'єктів, у якому виокремлено інваріантну геометричну структуру як його фундаментальну основу. Побудова моделі – це не лише формулювання математичних або чисельних залежностей. Як правило, цьому передують визначення форми об'єкта, структури зв'язків між його елементами, граничних контурів (топології) та граничних умов. Сукупність цих просторових і структурних характеристик формує геометричну структуру об'єкта, яка зберігається при зміні способу математичного опису, типу рівнянь або чисельного методу, тобто є інваріантною.

Обґрунтовано, що множина можливих моделей будь-якого об'єкта визначається його інваріантною геометричною структурою, яка визначає можливості подальшої формалізації. Наголошено, що геометрична складова є необхідною основою інженерного моделювання, оскільки будь-яка модель спирається на попередньо визначену просторову конфігурацію системи, яка визначає можливі способи її математичного представлення.

Процес моделювання розглядається як послідовність переходів від реального об'єкта до його математичної моделі через визначення геометричної складової та виокремлення інваріантної геометричної структури. Такий підхід дозволяє узагальнити логіку побудови моделей незалежно від характеру задачі та математичного апарату.

Запропонований підхід проілюстровано на прикладах моделювання тонкостінної оболонки, параметричної поверхні та кінематичної схеми механізму. Розглянуті задачі належать до різних класів, однак вони демонструють однакову логіку переходу від реального об'єкта до його математичної або чисельної моделі, що підтверджує універсальність інваріантної геометричної структури.

Отримані результати дозволяють розглядати геометричний етап не лише як самостійну складову процесу інженерного моделювання, а й як методологічну основу побудови моделей складних технічних систем.

Ключові слова: інженерне моделювання; методологія моделювання; геометричне моделювання; геометрична структура; просторова

організація системи; топологія; геометрична складова моделі; інваріантна геометрична структура

Постановка проблеми. Сучасні технічні системи характеризуються високим рівнем складності, багаторівневою організацією та взаємодією різноманітних фізичних процесів. І моделювання тут стає одним із основних інструментів аналізу, проектування та оптимізації інженерних об'єктів.

У наукових і прикладних дослідженнях інженерне моделювання традиційно описується як послідовність етапів: постановка задачі, вибір математичного апарату, формування математичної моделі, її реалізація у чисельному середовищі та аналіз отриманих результатів. При цьому геометрична складова здебільшого розглядається як допоміжна або така, що автоматично забезпечується сучасними програмними засобами.

Разом із тим будь-який математичний опис технічного об'єкта ґрунтується на попередньому встановленні його просторової організації. Саме на цьому етапі визначаються форма об'єкта, структура зв'язків між його елементами, граничні контури та граничні умови. Невизначеність або помилки у визначенні цих характеристик можуть призводити до некоректності подальшої математичної формалізації та порушення коректності моделювання.

Метою роботи є обґрунтування необхідності виокремлення інваріантної геометричної структури процесу інженерного моделювання та визначення її ролі у формуванні математичних моделей технічних систем.

Наукова новизна роботи полягає у введенні та обґрунтуванні поняття інваріантної геометричної структури процесу інженерного моделювання, яка розглядається як основа, що передує побудові математичної моделі та визначає множину допустимих формалізацій технічної системи.

Для ілюстрації запропонованого підходу у статті розглянуто три приклади інженерного моделювання: тонкостінну оболонку, параметричну поверхню та кінематичну схему механізму.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблеми інженерного моделювання широко досліджуються у роботах, присвячених математичному моделюванню технічних систем, геометричному моделюванню та використанню сучасних CAD/CAE-систем. У цих дослідженнях основна увага приділяється побудові математичних моделей, чисельним методам розв'язання інженерних задач, а також програмній реалізації моделей у спеціалізованих програмних середовищах [1–2].

Значний розвиток отримали підходи, пов'язані з параметричним і геометричним моделюванням об'єктів складної форми, зокрема побудовою параметричних поверхонь, використанням сплайнів, NURBS-моделей та іншими методами представлення геометрії у комп'ютерних системах проектування [2–3]. У межах цих досліджень геометрія об'єкта розглядається переважно як засіб опису форми та підготовки даних для

подальшого чисельного аналізу, що створює передумови для уявлення про другорядність геометричної складової моделювання.

Але зменшення ролі ручних геометричних побудов у сучасних CAD-системах не означає втрати значення геометрії, а свідчить про її перехід на рівень прихованої структурної основи моделі, що визначає можливості її математичного опису. У більшості робіт процес моделювання описується переважно з позицій математичної формалізації задачі, тоді як геометричний етап побудови моделі як самостійний методологічний рівень дослідження не розглядається.

Таким чином, незважаючи на значну кількість праць, присвячених математичному та геометричному моделюванню технічних систем, питання геометричної структури як універсальної основи побудови моделей залишається недостатньо дослідженим.

Формулювання цілей. Метою даної роботи є обґрунтування необхідності виокремлення інваріантної геометричної структури процесу інженерного моделювання та аналіз її ролі у формуванні моделей технічних об'єктів та систем та визначенні допустимих способів їх побудови. Для досягнення поставленої мети у роботі пропонується схема переходу від реального об'єкта до математичної моделі та аналізуються приклади інженерного моделювання, що ілюструють спільну геометричну основу цього процесу.

Основна частина. Процес інженерного моделювання має інваріантну геометричну структуру, яка передуює математичній формалізації моделі та визначає множину допустимих способів її математичного опису. Таке розуміння процесу моделювання дозволяє розглядати геометричний етап не лише як підготовчу процедуру побудови моделі, а як самостійну методологічну складову інженерного аналізу.

У більшості традиційних описів моделювання можна виділити два домінуючі способи його представлення. Перший має алгоритмічний характер і починається з вибору математичного апарату та формування математичного опису системи. Другий є програмно-орієнтованим і ґрунтується на використанні готових обчислювальних середовищ, у яких модель створюється за допомогою вже реалізованих інструментів. Незважаючи на відмінності між цими підходами, обидва вони передбачають наявність певної геометричної схеми об'єкта, хоча ця схема зазвичай в процесі моделювання не розглядається як окремий рівень аналізу.

Разом з тим у реальній інженерній практиці побудові математичної моделі передуює визначення просторової організації системи. На цьому етапі інженер визначає форму об'єкта, характер взаємодії його частин, просторові межі системи та граничні умови. Саме ці характеристики задають структуру майбутньої моделі і не можуть бути безпосередньо отримані лише з математичних міркувань. Отже, геометричний етап має самостійний зміст.

У зв'язку з цим доцільно виділити поняття інваріантної геометричної структури інженерного моделювання як окремий етап. Під інваріантною

геометричною структурою пропонується розуміти просторово-топологічну організацію об'єкта, яка зберігається при переході до різних форм його математичного або чисельного опису. Інваріантність у даному контексті проявляється у збереженні топології системи, граничних контурів і умов, а також характеру навантажень або зв'язків між елементами. Таким чином, інваріантна геометрична структура є первинною відносно конкретної математичної моделі або методу розрахунку і виступає основою подальшої їх формалізації.

Такий підхід до опису геометричної основи моделі узгоджується з принципами структурно-параметричного геометричного моделювання, розробленого в школі прикладної геометрії КПІ ім. Ігоря Сікорського, у межах якого геометричний опис об'єкта ґрунтується на поєднанні його структурних характеристик (топології та зв'язків між елементами) і параметричного задання геометричних величин [4].

З урахуванням цього процес інженерного моделювання можна розглядати як послідовність переходів від реального об'єкта до його математичного опису. На першому етапі визначається геометрія об'єкта та його просторова організація. Наступним кроком є виділення інваріантної геометричної структури. На цьому етапі формується конструктивна схема, у якій зберігається топологія та основні просторові співвідношення, а другорядні геометричні деталі усуваються. Лише після цього здійснюється побудова математичної або чисельної моделі.

Такий процес переходу може бути схематично поданий у вигляді послідовності (рис. 1)

$$O \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow M$$

Рис. 1. Структурна схема процесу інженерного моделювання

У цій схемі: O – реальний об'єкт, G_1 – геометричний опис об'єкта, G_2 – інваріантна геометрична структура, а M – математична або чисельна модель.

Важливо зазначити, що перехід від інваріантної геометричної структури до математичної моделі не є взаємно однозначним відображенням. Одній і тій самій геометричній структурі може відповідати множина моделей $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$, які відрізняються, наприклад, вибором рівнянь, рівнем спрощення або способом чисельної реалізації. Подібна ситуація, зокрема, спостерігається у різних реалізаціях методу скінченних елементів [5].

Водночас множина допустимих моделей не є довільною. Вона обмежується інваріантною геометричною структурою, яка визначає просторові межі системи, характер зв'язків між її елементами, граничні умови та допустимі припущення щодо спрощення. Таким чином,

інваріантна геометрична структура виступає не лише передумовою математичного опису, а й критерієм відбору допустимих моделей.

Для конкретизації наведених положень розглянемо декілька інженерних прикладів різної природи – механічної, геометричної та структурно-кінематичної, – у яких роль інваріантної геометричної структури проявляється найбільш наочно та простежується запропонована послідовність переходу від об'єкта до моделі.

Приклад 1. Розглянемо деяку оболонку довільної криволінійної форми. На етапі геометричного опису визначаються її зовнішня та внутрішня поверхні, товщина, граничні контури та умови закріплення. Таким чином задається геометричне представлення об'єкта як тривимірного тіла.

Подальший аналіз пов'язаний із виділенням інваріантної геометричної структури. У класичних підходах теорії оболонок тривимірне тіло зводиться до серединної поверхні – поверхні, що проходить посередині товщини оболонки [6]. Саме ця поверхня разом із заданими граничними умовами утворює геометричну основу моделі. При цьому зберігаються топологія поверхні, її метричні характеристики (зокрема кривизна), а також розташування граничних контурів.

Після встановлення цієї геометричної основи здійснюється побудова математичної моделі, для реалізації якої можуть використовуватися різні системи рівнянь [6]. Хоча математичний опис змінюється, серединна поверхня як геометрична основа залишається сталою, що підтверджується сучасними дослідженнями обчислювальних моделей оболонок [7].

Цей приклад демонструє, що саме геометрична структура оболонки визначає можливі способи її математичного опису. Подібна логіка спостерігається і в задачах геометричного моделювання.

Приклад 2. Розглянемо процес побудови параметричної моделі складної просторової поверхні у системах автоматизованого проектування. На початковому етапі формується просторове уявлення про поверхню: визначаються її загальна конфігурація, граничні контури, характер кривизни, а також наявність симетрії або особливих точок. Поверхня може задаватися ескізами, системою перетинів або напрямними кривими. На цьому рівні встановлюється геометрія, без переходу до аналітичного або дискретного опису.

Виділення інваріантної геометричної структури поверхні – є наступним кроком. Визначається її топологія та структурна організація: кількість і тип граничних контурів, топологічний тип поверхні (відкрита, замкнена або багатозв'язна), взаємне розташування її частин, а також параметричні умови, які формують основу подальшого опису. Інваріантною в цьому випадку виступає топологічна та метрична структура поверхні, що включає кількість і тип граничних ліній, характер з'єднання сегментів, орієнтацію параметричних напрямів та неперервність у місцях стикування.

Після встановлення цієї структури вводиться математичний опис поверхні. Він може бути реалізований, наприклад, у параметричному вигляді (1)

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (1)$$

або через апроксимацію за допомогою NURBS-моделі чи скінченної сітки, що відповідає усталеним підходам комп'ютерного геометричного моделювання [8–9]. Незалежно від вибраного способу опису, топологія поверхні, кількість граничних контурів і взаємне розташування її частин залишаються незмінними, оскільки ці характеристики не залежать від конкретної форми аналітичного задання [10].

Аналогічна закономірність спостерігається і в задачах кінематичного аналізу механізмів.

Приклад 3. Розглянемо деякий плоский шарнірний механізм, що складається з жорстких ланок, з'єднаних обертальними шарнірами. На етапі встановлення геометрії визначаються довжини ланок, типи з'єднань та їх взаємне розташування у площині. У результаті формується певна конфігурація механізму як просторово організованої системи елементів.

Подальший аналіз вимагає виділення інваріантної геометричної структури механізму, якою виступає топологія з'єднань, послідовність ланок та кількість ступенів свободи, оскільки саме ця структурна схема визначає допустимі переміщення системи і виступає основою подальшого математичного опису.

Математична модель механізму може будуватися різними способами: через векторні рівняння замикання, матричні співвідношення, рівняння Лагранжа або чисельну симуляцію руху. Незалежно від конкретної форми аналітичного опису, геометрична схема механізму – система ланок і шарнірів – залишається незмінною.

Розглянуті приклади охоплюють задачі різної природи: моделювання фізичних оболонкових конструкцій, геометричне представлення поверхонь та структурно-кінематичний опис механізмів. Проте в кожному з цих випадків інваріантна геометрична структура передуює математичному опису та визначає множину допустимих моделей. Це дозволяє розглядати її як загальну основу інженерного моделювання незалежно від характеру задачі.

Порівняння запропонованого підходу з традиційними описами процесу моделювання показує, що їхні вихідні положення відрізняються. У межах алгоритмічного підходу, моделювання, як правило, починається з вибору математичного апарату та формування системи рівнянь, тоді як геометрія розглядається як похідна від прийнятого математичного опису. Натомість геометрично орієнтований підхід виходить із протилежного припущення: математичні співвідношення є наслідком попередньо встановленої просторової структури об'єкта. У цьому сенсі геометрична структура виступає обмеженням для множини можливих математичних моделей і визначає рамки їх побудови.

Висновки. Обґрунтовано доцільність розгляду інженерного моделювання з позицій інваріантної геометричної структури, яка передусє математичному опису та визначає допустимі форми його побудови. Показано, що геометрична складова виступає не допоміжним, а структуроутворюючим елементом процесу моделювання.

Виділення інваріантної геометричної структури дозволяє розглядати геометричний етап як самостійну методологічну ланку, що забезпечує узгодженість між реальним об'єктом і його формалізованим представленням. Такий підхід сприяє більш обґрунтованому вибору математичного апарату та запобігає формалізації, не узгодженій із просторовою організацією системи.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на уточнення критеріїв встановлення інваріантної геометричної структури та на аналіз її ролі у задачах багаторівневого моделювання складних технічних систем.

Таким чином, узагальнене положення полягає в тому, що у процесі інженерного моделювання математичний опис системи є похідним від її інваріантної геометричної структури, яка визначає множину можливих моделей і виступає методологічною основою їх побудови.

Література

1. Lin, R., Ji, Y., Ding, W., Wu, T., Zhu, Y., & Jiang, M. A survey on deep learning in 3D CAD reconstruction. *Applied Sciences*. 2025. Vol. 15, No. 12. Article 6681. DOI: <https://doi.org/10.3390/app15126681>
2. Li, G., Luo, Z., Feng, Y., Zhang, L., Gai, Y., & Lei, N. Robust tessellation of CAD models without self-intersections. *Journal of Computational Design and Engineering*. 2026. Vol. 13, No. 1. P. 239–258. DOI: <https://doi.org/10.1093/jcde/qwaf134>
3. Usama, M., Khan, M. S., Stricker, D., & Afzal, M. Z. NURBGen: High-fidelity text-to-CAD generation through LLM-driven NURBS modeling. arXiv. 2025. arXiv:2511.06194. URL: <https://arxiv.org/abs/2511.06194>
4. Ванін В. В., Вірченко Г. А., Яблонський П. О. До питання узагальнення структурно-параметричного формоутворення технічних об'єктів. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2020. Вип. 99. С. 56–64.
5. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., & Zhu, J. Z. The finite element method. 7th ed. Oxford : Elsevier, 2013. 756 p.
6. Timoshenko, S. P., & Woinowsky-Krieger, S. Theory of plates and shells. 2nd ed. New York : McGraw-Hill, 1959. 580 p.
7. Zhao, H., Hwang, J. T., & Chen, J. S. Shape optimization of isogeometric shells. arXiv. 2024.
8. Farin, G. Curves and surfaces for CAGD: A practical guide. 5th ed. San Francisco : Morgan Kaufmann, 2002. 542 p.
9. do Carmo, M. P. Differential geometry of curves and surfaces. Englewood Cliffs : Prentice-Hall, 1976. 503 p.

10. Krysl, P. Benchmarking computational shell models. Archives of Computational Methods in Engineering. 2023.

THE INVARIANT GEOMETRIC STRUCTURE OF ENGINEERING MODELING

Olena Kolosova, Hanna Shepel

The paper considers engineering modeling as a process of constructing models of technical objects, in which an invariant geometric structure is identified as its fundamental basis. Model construction is not limited to the formulation of mathematical or numerical relationships. Typically, model construction is preceded by the determination of the object's shape, the structure of interactions between its elements, boundary contours (topology), and boundary conditions. The combination of these spatial and structural characteristics forms the geometric structure of the object, which remains unchanged under variations in the mathematical description, the type of equations, or the numerical method, thereby being invariant.

It is substantiated that the set of possible models of any object is determined by its invariant geometric structure, which defines the framework for further formalization. It is emphasized that the geometric component constitutes an essential basis of engineering modeling, since any model relies on a previously established spatial configuration of the system that determines the admissible forms of its mathematical representation.

The modeling process is viewed as a sequence of transitions from a real object to its mathematical model through the identification of the geometric component and the extraction of the invariant geometric structure. This approach makes it possible to generalize the logic of model construction regardless of the nature of the problem and the mathematical framework.

The proposed approach is illustrated by examples of modeling a thin-walled shell, a parametric surface, and a kinematic scheme of a mechanism. The considered problems belong to different domains; however, they demonstrate a common logic of transition from a real object to its mathematical or numerical model, which confirms the general character of the invariant geometric structure.

The obtained results make it possible to consider the geometric stage not only as an independent component of the engineering modeling process, but also as a methodological basis for constructing models of complex technical systems.

Keywords: engineering modeling; modeling methodology; geometric modeling; geometric structure; spatial organization of systems; topology; geometric component of a model; invariant geometric structure

References

1. Skyba, O. P., Kovbashin, V. I., & Pik, A. I. (2018). Raster graphics of the PHOTOSHOP package. *Suchasni problemy modeliuвання*, 11, 154–158. [In Ukrainian].
2. Kovbashin, V. I., Pik, A. I., & Skyba, O. P. (2019). Studying the section “Vector graphics using the COREL DRAW package” in the distance learning course “Computer Graphics”. *Suchasni problemy modeliuвання*, 15, 103–109. [In Ukrainian].
3. Kovbashin, V. I., Pik, A. I., & Zakharchuk, O. P. (2021). Studying the course “Engineering Graphics and CAD Systems” in web-conference mode using the ATutor system. *Suchasni problemy modeliuвання*, 21, 164–170. [In Ukrainian].
4. Kovbashin, V. I., & Pik, A. I. (2023). Semester assessment of learning outcomes in the course “Engineering Graphics and CAD Systems” in web-conference mode using the ATutor system. *Suchasni problemy modeliuвання*, 25, 123–130. [In Ukrainian].
5. Kovbashin, V. I., Pik, A. I., & Balaban, S. M. (2024). Modeling of technical forms using SolidWorks in the course “Engineering Graphics and CAD Systems”. *Suchasni problemy modeliuвання*, 26, 143–148. DOI: <https://doi.org/10.33842/2313125X-2024-26-143-148> [In Ukrainian].
6. Kovbashin, V. I., Pik, A. I., & Balaban, S. M. (2025). Creation of engineering drawings using SolidWorks in the course “Engineering Graphics and CAD Systems”. *Suchasni problemy modeliuвання*, 27, 88–95. DOI: <https://doi.org/10.33842/2313-125X-2025-19-88-95> [In Ukrainian].
7. Kostyshyn, S. O., & Voit, S. O. (2006). Development of educational courses in the ATutor system: methodological guidelines for teachers (instructors). Ternopil: TDTU, 41 p. [In Ukrainian].

Матеріал надійшов до редакції 20.04.2026

Прийнято до друку 13.05.2026 р.