

УДК 621.833 + 515.2

ДОСЛІДЖЕННЯ ГЕОМЕТРІЇ ТА ФОРМОУТВОРЕННЯ АРОЧНИХ ЗУБЦІВ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПЕРЕДАЧ НОВІКОВА

DOI: 10.33842/2313-125X-2026-29-201-209

Матюшенко М.В., канд. техн. наук,

matushenkonikolay@ukr.net, ORCID: 0000-0003-4727-8993

Устиненко О.В., канд. техн. наук,

ustin1964@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6714-6122

Бондаренко О.В., канд. техн. наук,

avbondko@gmail.com, ORCID: 0000-0002-2693-5301

Національний технічний університет

«Харківський політехнічний інститут» (Харків, Україна)

Андрієнко С.В.,

andrisergejjsv@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4310-3128

Харківський національний автомобільно-дорожній університет (Харків, Україна)

Протасов Р.В., PhD,

roman.protasov@stuba.sk, ORCID: 0000-0003-1611-0610

Словацький технічний університет (Братислава, Словаччина)

Удосконалення зачеплення циліндричних зубчастих коліс з аročними зубцями є актуальним і недостатньо дослідженим науково-технічним напрямом, спрямованим на підвищення якості та навантажувальної здатності механізмів і машин, що застосовуються в різних галузях промисловості. Сучасний рівень розвитку комп'ютерних технологій, зокрема систем автоматизованого проектування, створює передумови для проведення поглиблених досліджень, а також для розроблення точних методів аналізу, синтезу аročного зачеплення та технологій виготовлення аročних зубчастих коліс у промислових умовах. Загальним недоліком існуючих методів нарізання аročних зубців є необхідність застосування індивідуальних різцевих головок для обробки зубчастих коліс із різною формою лінії зміщення вихідного контуру. У ряді випадків виникає потреба використання окремих інструментів для формування опуклих, увігнутих, евольвентних та криволінійних перехідних поверхонь западин між аročними зубцями. Крім того, застосування таких різцевих головок не забезпечує можливості нарізання бочкоподібних аročних зубців з оптимальними поздовжніми профілями опуклої та увігнутої сторін, що істотно обмежує потенціал підвищення навантажувальної здатності аročного зачеплення. Зазначені технологічні обмеження значною мірою стримують широке впровадження аročних зубчастих передач у сучасному машинобудуванні. Зубчасті передачі Новікова набули поширення завдяки тому, що особливості їх геометрії дають змогу суттєво підвищити контактну

міцність за інших рівних умов. Водночас ці передачі мають низку принципових недоліків. Основним із них є те, що передачі Новікова не належать до обкатних, унаслідок чого зубці повинні розташовуватися під певним кутом до твірної, відмінним від 0° та 90° . Наявність такого кута зумовлює виникнення осьової складової навантаження в зоні контакту. В евольвентних зубчастих передачах зазначений недолік традиційно усувався шляхом застосування шевронних коліс. На сучасному етапі розвитку зубчастих передач з'являються конструкції, що поєднують ознаки шевронних і звичайних зубчастих коліс. Це досягається завдяки зміні форми зубця вздовж його довжини з утворенням криволінійного зубця аrochenого типу, що створює передумови для більш ефективного використання переваг зачеплення Новікова та підвищення експлуатаційних характеристик зубчастих передач.

Ключові слова: геометрія поверхонь, зубчасті передачі Новікова, аrochenі зубці, метод обкатки, криволінійні поверхні.

Постановка проблеми. Визначальну роль при виборі параметрів вихідного контуру відіграє адекватність математичної моделі процесу зубонарізання реальному технологічному процесу виготовлення зубчастих коліс. Незважаючи на наявність ряду методик моделювання, до теперішнього часу вплив процесу обкатування враховувався переважно у рамках спрощених математичних моделей, що обмежує точність аналізу геометрії сформованого зубця та достовірність отриманих результатів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На теперішній час відомо понад сто різновидів вихідних контурів (ВК), що застосовуються при проектуванні зубчастих передач. Для передач з двома лініями зачеплення (ДЛЗ) розроблено дві основні групи вихідних контурів, які відрізняються формою та значеннями геометричних параметрів. Однак, незважаючи на значну кількість досліджень, спрямованих на визначення їх оптимальних параметрів, рекомендації, наведені в науковій літературі, мають суперечливий характер.

Формулювання цілей статті. Метою даної статті є аналітичне дослідження процесу огинання поверхні зубця кривими, заданими вихідним контуром, а також побудова уточненої математичної моделі формування зубців аrochenого типу з урахуванням реальних умов зубонарізання.

Основна частина. Нарізання зубців аrochenої форми здійснюється за допомогою різцевих головок радіуса R_c , у зв'язку з чим крок зачеплення в осьовому напрямку має змінний, кологвинтовий характер. Конфігурація зубця за висотою в певній мірі формується вихідним контуром інструментальної рейки в процесі обкатувального руху. Зазначене положення, на наш погляд, є закономірним, оскільки М. Л. Новіков підкреслював, що запропоноване ним зачеплення створює можливості для реалізації конструктивного підходу при проектуванні зубчастих передач. Для зубчастих передач Новікова з двома лініями зачеплення (ДЛЗ) відомі

дві основні групи вихідних контурів. До першої групи належать вихідні контури, у яких активні дугові ділянки головки та ніжки зубця з'єднані прямолінійною перехідною ділянкою. Найбільш вдалими вважаються контури, що виявили високі характеристики міцності в процесі промислових випробувань, зокрема контури за ГОСТ 15023-76, «Урал-2Н», «ЮТЗ-65» та інші. Вони відрізняються між собою висотою зубця, кутом тиску, радіусами активних ділянок, а також зміщенням центрів дуг. Промислова експлуатація зубчастих передач Новікова ДЛЗ, виготовлених із використанням вихідних контурів першої групи, показала наявність принципових особливостей їх роботи, пов'язаних з підвищеною чутливістю до навантажень у приполюсній зоні зачеплення. У зв'язку з цим у вихідних контурах другої групи приполюсну зону виведено з роботи шляхом введення перехідної увігнутої ділянки, утвореної внаслідок певного зсуву активних профілів головки та ніжки відносно осі симетрії. Найбільш поширеними серед цієї групи є вихідні контури типу ДОН-70, ДЛЗ 0.7-0.15, РГУ-5 та інші. Нехай xOy – нерухома система координат, пов'язана з ділильним колом радіуса, XO_1Y – рухома система координат, пов'язана з початковою прямою. Тоді кожному значенню кута обкатування μ відповідає певне положення початкової прямої, а отже, однозначно визначається положення миттєвої точки контакту у верстатному зачепленні. З положеннями центрів дуг окружностей вихідного контуру пов'язується полярна система координат $(r; \alpha)$, полярна вісь якої паралельна осі O_1X . При цьому задається діапазон зміни полярного кута α . Оскільки кут α функціонально пов'язаний з кутом обкатування μ , то діапазон зміни кута μ вважається відомим [1]. Крім того, як показано в роботі [1], при аналітичному описі окремих ділянок вихідного контуру та використанні формул переходу від системи координат XO_1Y до системи xOy отримується рівняння однопараметричної сім'ї, яка описує миттєві положення вихідного контуру в процесі обкатки,

$$\begin{cases} F(x, y, \mu) = 0; \\ F_{\mu}(x, y, \mu) = 0. \end{cases}$$

Розв'язання цієї системи відносно параметра μ відповідно приводить до рівняння огинаючої та дискримінантної кривої. Дослідження доповнимо результатами [1, 6], що дає змогу встановити необхідні та достатні умови існування огинаючої, а також виявити диференціальні особливості огинаючої кривої і визначити клас її гладкості. За рівнянням огинаючої визначаються межі ділянок зубця колеса, які відповідають граничним значенням кута обкатування μ . Спряження ділянок кривих, з яких складається вихідний контур першого типу, є гладким. У процесі обкатування точкам спряження на вихідному контурі відповідають певні точки на поверхні зубця колеса. Згідно з системою рівнянь, не виконуючи її безпосереднього розв'язання, на підставі результатів [2, 3] визначаються рівняння півдотичних, параметрами яких є параметри ВК та радіус R

ділительного кола. Аналіз найбільш поширених вихідних контурів [4] першого типу показав, що півдотичні доповнюють одна одну до єдиної дотичної лише за умови числа зубців $z > 14$ і тільки для параметрів вихідного контуру за ГОСТ 15023-76. Для інших вихідних контурів [5], незалежно від числа зубців, у точках спряження відсутня гладкість класу C^1 . Для досягнення поставленої мети в роботі розв'язується задача реалізації математичної моделі процесу формоутворення зубців на основі застосування системи автоматизованого проектування. Метод дослідження реалізовано з використанням автоматизованого програмного комплексу T-FLEX CAD, який, на відміну від більшості інших САПР, забезпечує параметричне проектування та розрахунок тривимірних моделей з необхідною точністю, що дозволяє адекватно відтворити процес огинання та отримати геометрично коректні моделі зубчастих поверхонь.

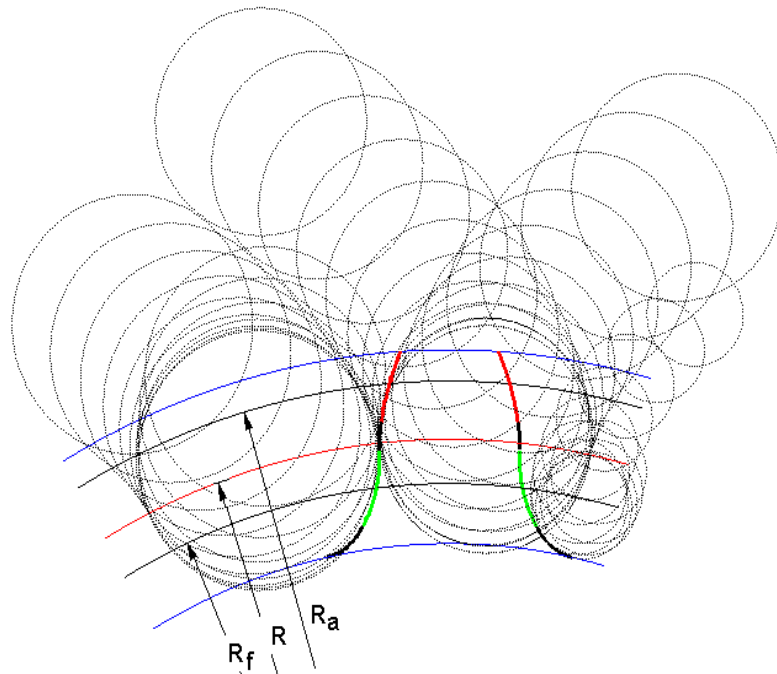


Рис.1. Процес формоутворення серединного профілю зубця колеса при використанні вихідних контурів першої групи

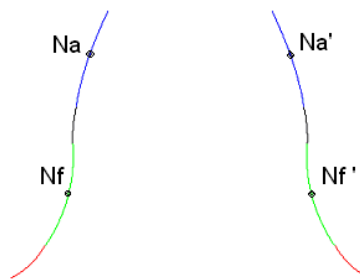


Рис.2. Серединний профіль зубця колеса, отриманий при використанні вихідного контуру ГОСТ 15023-76 ($z=15, m=3,15$)

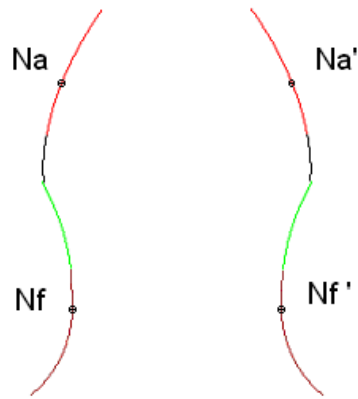


Рис.3. Серединний профіль зубця колеса, отриманий при використанні вихідного контуру ГОСТ 15023-76 ($z=5, m=3,15$)

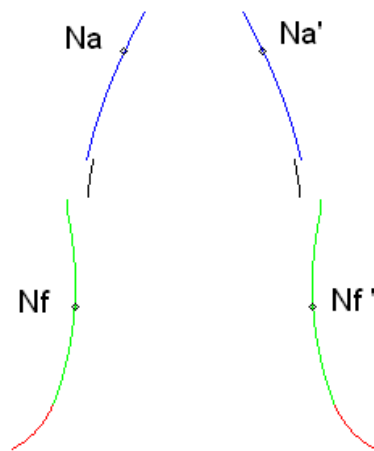


Рис.4. Серединний профіль зубця колеса, отриманий при використанні вихідного контуру ЮТЗ-65 ($z=15, m=3$)

У вихідних контурах другої групи дуги кривих не завжди мають гладке спряження класу C^1 . У зв'язку з цим відсутні підстави вважати, що відповідні ділянки серединного профілю зубця колеса також будуть спряжені з гладкістю класу C^1 . Більше того, точки спряження на вихідному контурі не завжди відповідають точкам спряження на профілі зубця колеса. Покажемо це на конкретному прикладі. Розглянемо точку K_{12} спряження кривих 1-1 та 2-2 на вихідному контурі. Крива 1-1 формує відповідну ділянку 1'-1' серединного профілю зубця колеса. Оскільки точка K_{12} належить кривій 1-1, їй відповідає точка K'_1 на ділянці 1'-1' серединного профілю зубця. Аналогічно, точка K'_2 належить кривій 2'-2. При цьому координати точок K'_1 та K'_2 не завжди збігаються. Зазначена особливість зумовлена застосуванням аналітично точного опису огинаючої, а не її наближеного подання дугами окружностей, евольвентами, циклоїдами тощо. Це пояснюється тим, що центри дуг окружностей вихідного контуру рухаються по еквідистантних евольвентах, тоді як огинаючі профілів 1-1 і 2-2 у загальному випадку не є еквідистантними. З геометричної точки зору верстатне зачеплення на ділянці K'_1 - K'_2 серединного профілю зубця колеса

відсутнє. Фізично ж реалізація верстатного зачеплення на цій ділянці відбувається внаслідок впливу пружних деформацій матеріалу зубця колеса. Зазначене положення ілюструється на рис. 5, 6.

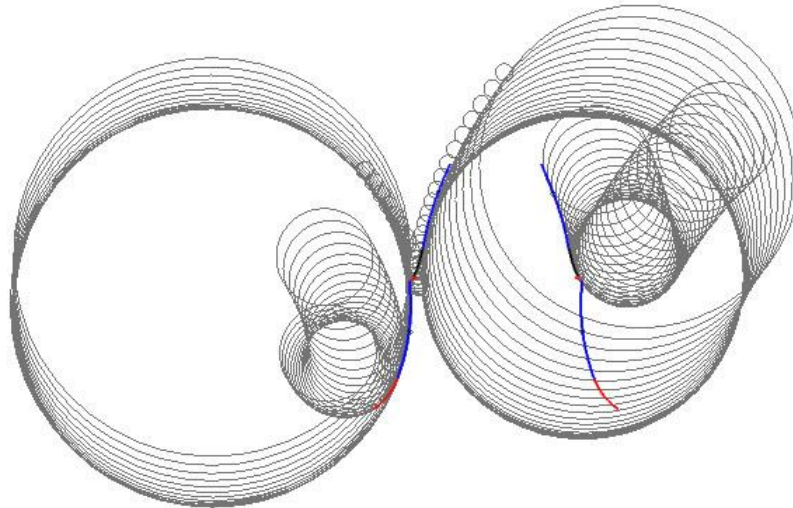


Рис.5. Однопараметричне огинання та процес формоутворення серединного профілю зубця колеса при використанні вихідних контурів другої групи

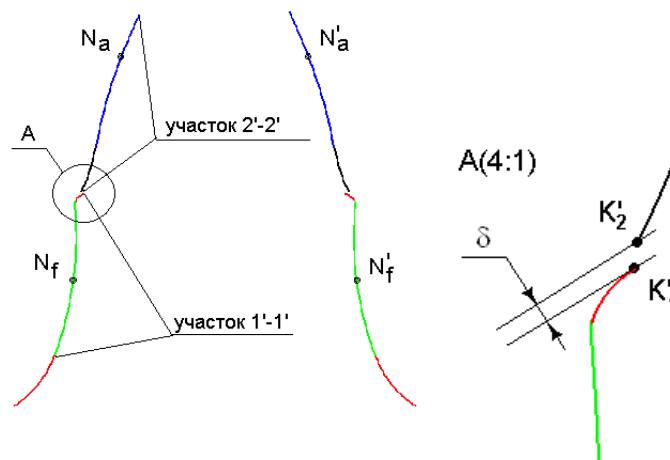


Рис.6. Серединний профіль зубця колеса, отриманий при використанні ВК другої групи ($z=15$, $m=4$)

Нехай $\delta = |K'_1 K'_2|$ — довжина ділянки $K'_1 K'_2$. Розглянемо величину δ як функцію геометричних параметрів вихідного контуру, числа зубців z та модуля зачеплення m . Аналіз показує, що вибір числа зубців z і типу вихідного контуру другої групи не чинить істотного впливу на значення функції δ . Водночас функція δ є однорідною відносно модуля зачеплення m .

Висновки. Проведені аналітичні дослідження показали, що за малих значень параметра δ його величина перебуває в межах шорсткості поверхні зубців і практично не впливає на роботу зубчастої передачі. Водночас за

збільшення δ до значень, співрозмірних із геометричними параметрами профілю, ця величина може істотно впливати на експлуатаційні характеристики передачі, зокрема призводити до різкої зміни умов навантаження в бік їх погіршення, зростання динамічної збудливості, підвищення рівня шуму та, як наслідок, до зниження довговічності зубчастої передачі. З огляду на викладене, за підвищених значень δ доцільно застосовувати уточнену методику визначення радіуса перехідної увігнутої ділянки вихідного контуру або використовувати при зубонарізанні вихідні контури першого типу, які забезпечують більш сприятливі умови формоутворення серединного профілю зубця. Результати представленого аналітичного дослідження процесу огинання зубця кривими вихідного контуру були використані при математичному моделюванні тривимірної області зубця. Це створює можливість виконання розрахунків, пов'язаних з оцінюванням напружено-деформованого стану зубчастих передач, а також відкриває перспективи для подальших досліджень, спрямованих на оптимізацію геометрії зубців і підвищення їх експлуатаційної надійності.

Література

1. Protasov R., Andrienko S., Ustinenko A., Bondarenko A., Matushenko N. Geometry modeling of gear and chain drive with evolute profile and research of its contact stress. *Fiabilitate și durabilitate (Fiability & Durability)*. 2017. Issue 1(19). P. 287–293.
2. Perović A., Vukelić M., Milovančević D. Geometric analysis and quality assessment of spur gear tooth profiles. *Applied Sciences*. 2023. Vol. 13, No. 17. Article 9412. DOI: <https://doi.org/10.3390/app13179412>.
3. Pagliari L., Hong I., Concli F. Experimental investigation of gear tooth bending strength considering profile modification. *Forschung im Ingenieurwesen*. 2024. Vol. 88, No. 3. P. 489–502. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10010-024-00766-5>.
4. Yin Z., Wang Y., Liu H. Tooth surface geometry evolution and wear characteristics of helical gears. *Mechanical Sciences*. 2025. Vol. 16, No. 2. P. 565–578. DOI: <https://doi.org/10.5194/ms-16-565-2025>.
5. Tkach P., Reviakina O., Kryvosheia A., Melnyk V., Ustynenko O., Protasov R. Meshing characteristics of profile shifted cylindrical quasi-involute arc-tooth-trace gears. Part 1. Theoretical base. *Strojnícky časopis – Journal of Mechanical Engineering*. 2022. Vol. 72, No. 2. P. 201–210. DOI: <https://doi.org/10.2478/scjme-2022-0021>.
6. Tkach P., Reviakina O., Kryvosheia A., Melnyk V., Ustynenko O., Protasov R. Meshing characteristics of profile shifted cylindrical quasi-involute arc-tooth-trace gears. Part 2. Calculation results. *Strojnícky časopis – Journal of Mechanical Engineering*. 2023. Vol. 73, No. 2. P. 181–192. DOI: <https://doi.org/10.2478/scjme-2023-0018>.

RESEARCH ON THE GEOMETRY AND FORMATION OF ARCHED TEETH IN NOVIKOV CYLINDRICAL GEARS

Mykola Matushenko, Oleksandr Ustynenko, Oleksiy Bondarenko,
Sergij Andrienko, Roman Protasov

Improving the meshing of cylindrical gears with arched teeth is a relevant and insufficiently researched scientific and technical direction aimed at improving the quality and load capacity of mechanisms and machines used in various industries. The modern level of development of computer technologies, in particular computer-aided design systems, creates the prerequisites for conducting in-depth research, as well as for developing accurate methods of analysis, synthesis of arched gearing and technologies for manufacturing arched gears in industrial conditions. A common drawback of existing methods of cutting arched teeth is the need to use individual cutting heads for processing gears with different shapes of the displacement line of the initial contour. In some cases, there is a need to use separate tools for forming convex, concave, involute and curved transition surfaces of the depressions between the arched teeth. In addition, the use of such cutting heads does not provide the possibility of cutting barrel-shaped arched teeth with optimal longitudinal profiles of the convex and concave sides, which significantly limits the potential for increasing the load capacity of the arched gear. These technological limitations significantly hinder the widespread introduction of arched gears in modern mechanical engineering. Novikov gears have become widespread due to the fact that the features of their geometry make it possible to significantly increase the contact strength, other things being equal. At the same time, these gears have a number of fundamental disadvantages. The main one is that Novikov gears do not belong to the running-in gears, as a result of which the teeth must be located at a certain angle to the generator, different from 0° and 90° . The presence of such an angle causes the appearance of an axial component of the load in the contact zone. In involute gears, this disadvantage was traditionally eliminated by using chevron wheels. At the current stage of development of gears, designs appear that combine the features of chevron and conventional gears. This is achieved by changing the shape of the tooth along its length with the formation of a curved arched tooth, which creates the prerequisites for more effective use of the advantages of Novikov engagement and increasing the operational characteristics of gears.

Keywords: surface geometry, Novikov gears, arched teeth, running-in method, curved surfaces.

Referenses

1. Protasov, R., Andrienko, S., Ustinenko, A., Bondarenko, A., & Matushenko, N. (2017). Geometry modeling of gear and chain drive with evolute profile and research of its contact stress. *Fiabilitate și durabilitate (Fiability & Durability)*, 1(19), 287–293. [In English].
2. Perović, A., Vukelić, M., & Milovančević, D. (2023). Geometric analysis and quality assessment of spur gear tooth profiles. *Applied Sciences*, 13(17), Article 9412. DOI: <https://doi.org/10.3390/app13179412> [In English].
3. Pagliari, L., Hong, I., & Concli, F. (2024). Experimental investigation of gear tooth bending strength considering profile modification. *Forschung im Ingenieurwesen*, 88(3), 489–502. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10010-024-00766-5> [In English].
4. Yin, Z., Wang, Y., & Liu, H. (2025). Tooth surface geometry evolution and wear characteristics of helical gears. *Mechanical Sciences*, 16(2), 565–578. DOI: <https://doi.org/10.5194/ms-16-565-2025> [In English].
5. Tkach, P., Reviakina, O., Kryvosheia, A., Melnyk, V., Ustynenko, O., & Protasov, R. (2022). Meshing characteristics of profile shifted cylindrical quasi-involute arc-tooth-trace gears. Part 1. Theoretical base. *Strojnícky časopis – Journal of Mechanical Engineering*, 72(2), 201–210. DOI: <https://doi.org/10.2478/scjme-2022-0021> [In English].
6. Tkach, P., Reviakina, O., Kryvosheia, A., Melnyk, V., Ustynenko, O., & Protasov, R. (2023). Meshing characteristics of profile shifted cylindrical quasi-involute arc-tooth-trace gears. Part 2. Calculation results. *Strojnícky časopis – Journal of Mechanical Engineering*, 73(2), 181–192. DOI: <https://doi.org/10.2478/scjme-2023-0018> [In English].

Матеріал надійшов до редакції 27.04.2026

Прийнято до друку 13.05.2026 р.