

УДК 514.18

СПОСОБИ ПОБУДОВИ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНИХ ЕКВІДИСТАНТ ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ РОЗМІЩЕННЯ ФОРТИФІКАЦІЙНИХ СПОРУД

DOI: 10.33842/2313-125X-2026-29-220-229

Мостовенко О. В. д-р. техн. наук,

mostovenko.ov@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-3423-4126

Скочко В. І., д-р. техн. наук,

skochko.vi@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-1709-2621

Кожедуб С. А. канд. техн. наук,

kozhedub.sa@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-6315-8161

Котляревський О. В., канд. екон. наук,

kotliarevskiyi.ov@knuba.edu.ua, ORCID: 0009-0004-1645-8064

Посікера А. В., аспірант*,

posikera_av@knuba.edu.ua, ORCID: 0009-0003-3989-2704

*Київський національний університет будівництва і архітектури
(м. Київ, Україна)*

Дане дослідження присвячено створенню алгоритму геометричного моделювання рівновіддалених кривих (еквідистант) у тих випадках, коли базову криву задано дискретно у вигляді координат окремих точок. Цей підхід має важливе значення для архітектурного та інженерного проектування, геоінформаційного аналізу, просторового моделювання та підвищення рівня ефективності оборонних технологій, що потребують визначення безпечних територій, буферних зон і функціонально оптимальних розташувань об'єктів оборонного призначення, зокрема фортифікаційних споруд. Особливо важливо, що в задачах оборонного призначення вихідні дані часто представлено дискретно, наприклад, у вигляді координат з систем спостереження, цифрових карт або геодезичних вимірювань.

Запропоновано два способи геометричного моделювання еквідистант у дискретному вигляді на заданій відстані від ребер базової дискретно представленої кривої (ДПК). Перший спосіб базується на визначенні вершин еквідистанти за рахунок перетину суміжних ребер еквідистанти, побудованих за допомогою перпендикулярів, відкладених на певну відстань від відповідних ребер базової ДПК. Другий спосіб передбачає задання параметра еквідистанти як відстань від вершини еквідистанти до середини ребра базової ДПК, що дозволяє одержати інший результат у вигляді координат вершин еквідистанти. Обидва методи дозволяють будувати як внутрішні, так і зовнішні еквідистанти.

* Науковий керівник – д-р техн. наук, професор Скочко В.І.

Тестові приклади наочно демонструють побудову двох еквідистант на заданій відстані за обома способами, а також аналіз особливих точок еквідистанти при перевищенні параметра еквідистанти радіусу кривизни базової кривої, що включає точки звороту на еволюті та точку самоперетину еквідистанти.

Отримані результати демонструють дієвість запропонованих способів для моделювання геометричних об'єктів, зокрема у контексті визначення раціонального положення об'єктів оборонного призначення та просторового аналізу. Визначено перспективність подальших досліджень, спрямованих на удосконалення способів геометричного моделювання дискретно представлених еквідистант та оптимізацію обчислювальних алгоритмів для підвищення точності й ефективності.

Ключові слова: геометричне моделювання, еквідистанта, дискретно представлена крива, об'єкти оборонного призначення, фортифікаційні споруди.

Постановка проблеми. У багатьох практичних задачах з архітектурного проектування, інженерії, геоінформатики та оборонних технологій виникає необхідність побудови рівновіддалених кривих (еквідистант) до базової кривої, яку задано у вигляді дискретного набору точок. Існуючі способи моделювання еквідистант переважно розраховані на аналітичне задання кривої, що не забезпечує необхідної зручності при роботі з дискретними даними.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблемам дискретного геометричного моделювання присвячено численні праці як вітчизняних, так і закордонних вчених. Серед вітчизняних вчених слід відмітити роботи С.М. Ковальова, В.М. Найдиша, В.М. Верещаги, С.І. Пустюльги. У роботах [2], [5] дослідження спрямовані на побудову дискретних кривих та поверхонь, їх апроксимацію та створення геометричних моделей складних об'єктів. Разом із тим недостатньо дослідженими залишаються питання моделювання дискретно представлених еквідистант із забезпеченням заданої точності та можливості автоматизації процесу. У дослідженнях, пов'язаних з моделюванням рівновіддалених кривих і поверхонь, [6, 7] досліджено геометричний апарат формоутворення паралельних множин і рівновіддалених кривих як метод геометричного моделювання технічних об'єктів та процесів. У роботах [3, 4] авторами проаналізовано методи дискретного формування еквідистантних кривих як шляхом векторного задання параметрів, так і з використанням апарату числових послідовностей для замкнених кривих. У працях [1], [8–11] запропоновано підходи до побудови та застосування еквідистантних ліній на основі геометричного моделювання складних оболонок, високоточного планування траєкторій у роботизованому виробництві, апроксимації поверхонь і керування кінематикою інструменту.

Формулювання цілей статті. Ціллю статті є розробка способів

геометричного моделювання дискретно представлених еквідистант на заданій відстані від ребер ДПК.

Основна частина. Можливі два способи побудови дискретно визначеної еквідистанти на заданій відстані між ребрами еквідистанти та відповідними ребрами дискретно представленої кривої (ДПК). За першим способом вершини еквідистанти визначаються у результаті перетину суміжних ребер еквідистанти. За другим способом параметр еквідистанти задається як відстань від вершини еквідистанти до середини ребра базової ДПК.

За першим способом параметр d еквідистанти відкладається на перпендикулярах AD і BF (рис. 1) до відповідних ребер базової ДПК. Найпростіше це зробити, якщо перпендикуляри AD і BF проходять через вершини базової ДПК. Прямі DE і FG визначаються, з одного боку, із умови проходження перпендикулярів через відповідні точки ДПК, а з іншого боку – з умови паралельності ребер еквідистанти відповідним ребрам базової ДПК.

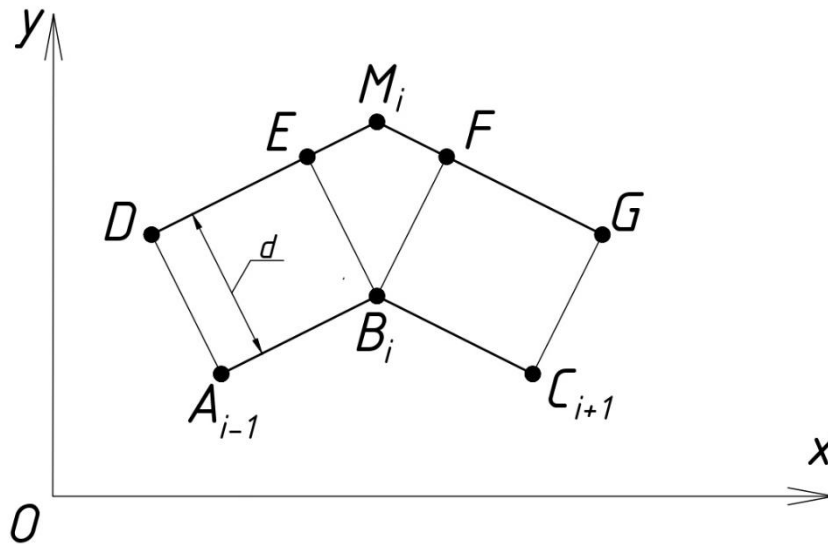


Рис. 1. Визначення вершин еквідистант за першим способом

Координати точок D і F , через які проводяться ребра еквідистанти, визначаються за формулами:

$$x_D = x_A + \frac{d(y_B - y_A)}{\mp \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}; \quad (1)$$

$$y_D = y_A + \frac{d(x_B - x_A)}{\pm \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}; \quad (2)$$

$$x_F = x_B + \frac{d(y_C - y_B)}{\mp \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}}; \quad (3)$$

$$y_F = y_B + \frac{d(x_C - x_B)}{\pm \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}}; \quad (4)$$

Різні знаки перед радикалом відповідають різним напрямкам параметра d на перпендикулярі.

Координати вузла M_i еквідистанти визначаються із умови перетину прямих DE і FG :

$$x_{M,i} = \frac{(x_B - x_A)(x_C - x_B)(y_F - y_D) + x_D(y_B - y_A)(x_C - x_B) - x_F(y_C - y_B)(x_B - x_A)}{(y_B - y_A)(x_C - x_B) - (y_C - y_B)(x_B - x_A)}; \quad (5)$$

$$y_{M,i} = \frac{(y_B - y_A)(y_C - y_B)(x_F - x_D) + y_D(x_B - x_A)(y_C - y_B) - y_F(x_C - x_B)(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)(y_C - y_B) - (x_C - x_B)(y_B - y_A)}. \quad (6)$$

Приклад 1. (рис. 2)

Задано базову ДПК, координати вершин якої наведено у двох перших рядках таблиці 1. Побудувати дві еквідистанти на відстані 4 лінійні одиниці від базової ДПК.

Координати точок D і F , через які проводяться ребра еквідистант, підраховано за формулами (1) – (4) і наведено у 3-6 та 9-12 рядках таблиці 1. Координати вузлів M_i двох еквідистант підраховано за формулами (5) та (6) і наведено у сьомому, восьмому та тринадцятому, чотирнадцятому рядках таблиці 1.

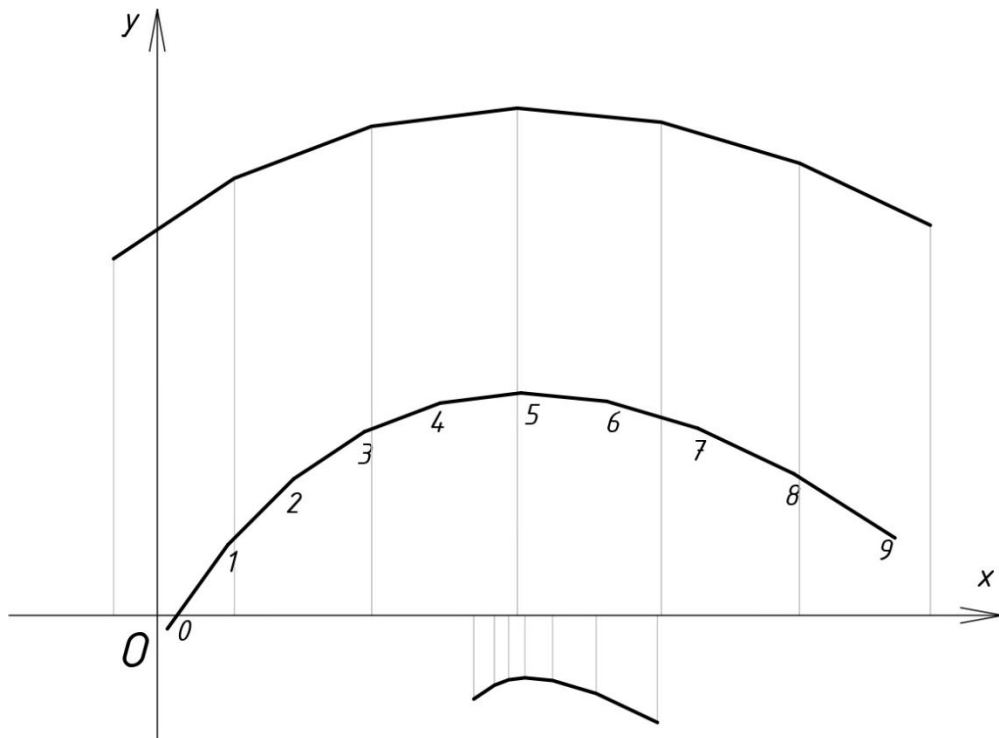


Рис. 2. Базова ДПК та еквідистанти

На рис. 2 показано базову ДПК та дві дискретно представлені еквідистанти.

Таблиця 1

Координати вузлів базової ДПК та еквідистант

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	0.143	1	1.929	2.929	4	5.143	6.357	7.643	9	10.429
y_i	-0.19	1	1.929	2.595	3	3.143	3.024	2.643	2	1.095
$x_{D/}$		-1.828	-0.288	1.514	3.503	5.533	7.493	9.356		
$y_{D/}$		3.828	5.258	6.336	6.969	7.124	6.859	6.258		
$x_{F/}$		-0.288	1.514	3.503	5.533	7.493	9.356	11.14		
$y_{F/}$		5.258	6.336	6.969	7.124	6.859	6.258	5.379		
$x_{M/}$		-0.617	1.09	3.032	5.089	7.125	9.08	10.929		
$y_{M/}$		5.039	6.176	6.91	7.167	6.968	6.389	5.513		
$x_{D''}$		3,828	4,146	4,344	4,497	4,753	5,221	5,93		
$y_{D''}$		-1,828	-1,4	-1,146	-0,969	-0,838	-0,811	-0,972		
$x_{F''}$		4,146	4,344	4,497	4,753	5,221	5,93	6,86		
$y_{F''}$		-1,4	-1,146	-0,969	-0,838	-0,811	-0,972	-1,379		
$x_{M''}$		4.475	4.768	4.968	5.197	5.589	6.206	7.071		
$y_{M''}$		-1.181	-0.986	-0.91	-0.881	-0.92	-1.103	-1.513		

На рис. 2 показано базову ДПК та дві дискретно представлені еквідистанти.

За другим способом (рис. 3) координати середини D ребра AB дорівнюють:

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad (7)$$

$$y_D = \frac{y_A + y_B}{2}. \quad (8)$$

Координати вершин M еквідистант визначаються з подібності трикутників ABC і MDE :

$$\frac{x_M - x_D}{d} = \frac{y_A - y_B}{AB}, \quad (9)$$

звідки:

$$x_{M',i} = \frac{d(y_{i-1} - y_i)}{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}} + \frac{x_i + x_{i-1}}{2}; \quad (10)$$

$$y_{M',i} = \frac{d(x_i - x_{i-1})}{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}} + \frac{y_i + y_{i-1}}{2}. \quad (11)$$

$$x_{M//,i} = \frac{d(y_{i-1} - y_i)}{-\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}} + \frac{x_i + x_{i-1}}{2}; \quad (12)$$

$$y_{M//,i} = \frac{d(x_i - x_{i-1})}{-\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}} + \frac{y_i + y_{i-1}}{2}. \quad (13)$$

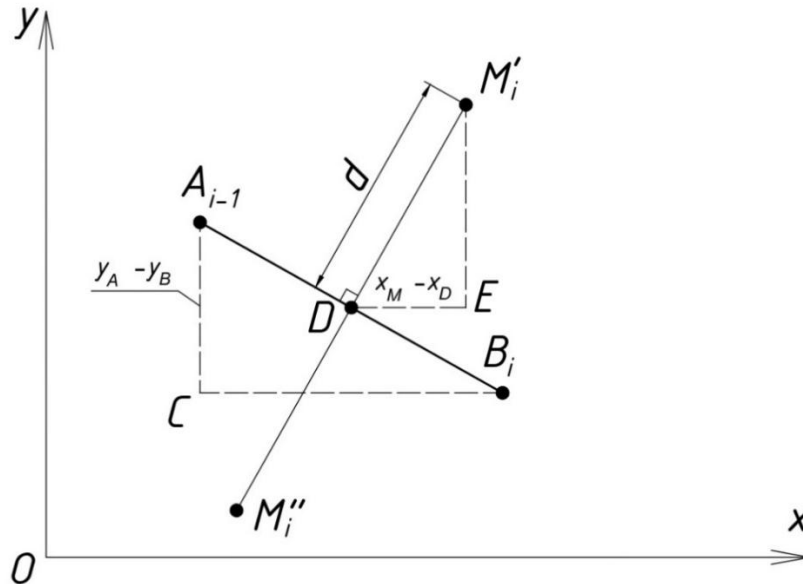


Рис. 3. Визначення вершин еквідистанти за другим способом

Приклад 2. (Рис. 4)

Задано базову ДПК з прикладу 1. Побудувати дві еквідистанти на відстані 4 лінійні одиниці від базової ДПК за другим способом.

Координати вузлів M_i' , які підраховано за формулами (10) і (11), наведено у першому та другому рядках таблиці 2. Координати вузлів M_i'' , які підраховано за формулами (12) і (13), наведено у третьому та четвертому рядках таблиці 2.

Таблиця 2

Координати вузлів двох еквідистант

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_{M'}$	-2.674	-1.364	0.212	2.05	4.075	6.14	8.136	10.034	11.855
$y_{M'}$	2.743	4.293	5.591	6.539	7.041	7.064	6.669	5.936	4.927
$x_{M''}$	3.817	4.293	4.646	4.879	5.068	5.36	5.864	6.609	7.574
$y_{M''}$	-1.933	-1.364	-1.067	-0.944	-0.898	-0.897	-1.002	-1.293	-1.832

Результати визначення координат вершин еквідистанти, які визначено за двома наведеними способами, порівняти неможливо, оскільки за кожним способом отримуємо різні вершини дискретно визначеної еквідистанти.

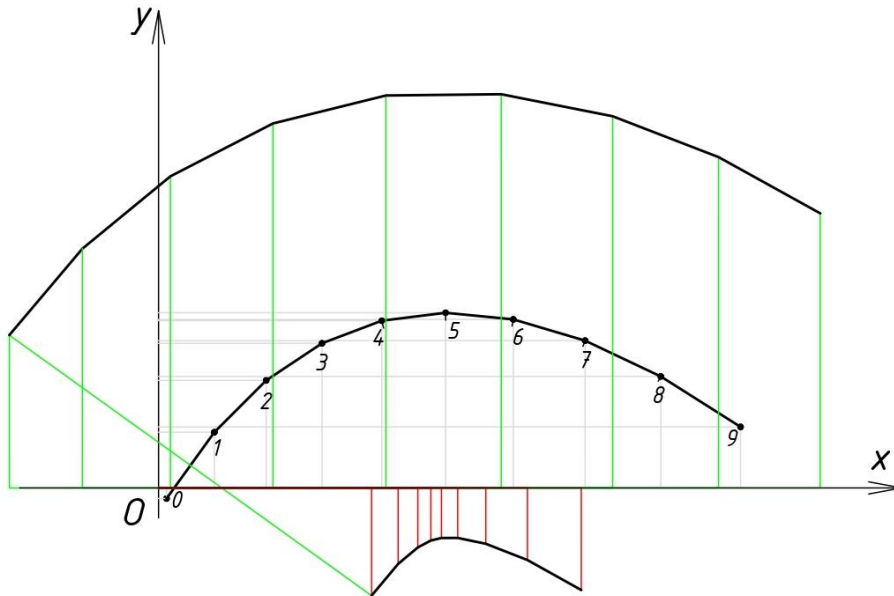


Рис. 4. Базова ДПК та еквідистанти

На еквідистанті виникають особливі точки, якщо параметр d еквідистанти перевищує радіус кривизни базової кривої, з яких дві точки є точками звороту на еволюті базової кривої і одна точка самоперетину еквідистанти. Такий випадок показано на рис. 5, де базову ДПК утворюють точки на параболі $y=0,25x^2$, а параметр еквідистанти дорівнює $d=5$ лінійних одиниць.

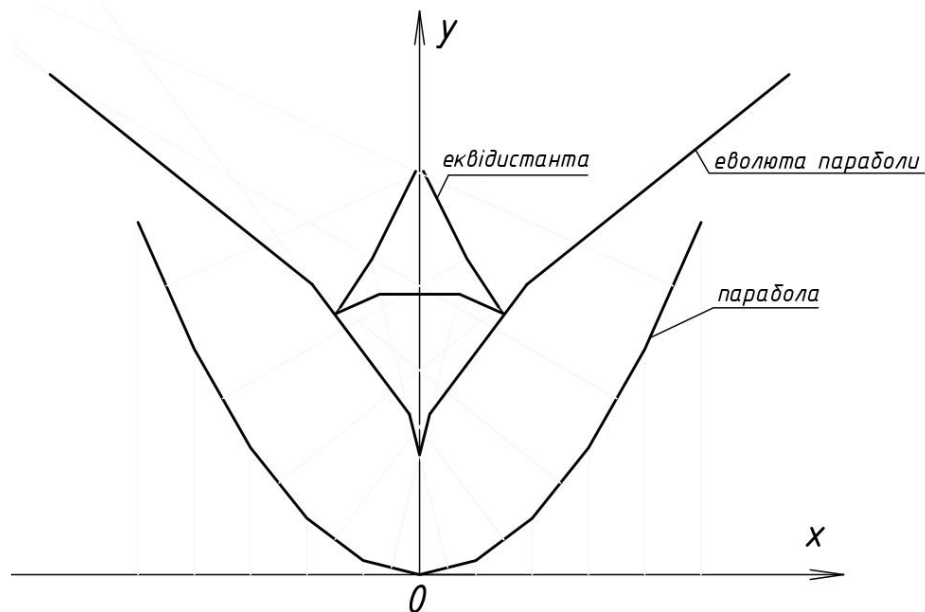


Рис. 5. Особливі точки на еквідистанті

Висновки. Наведено два способи геометричного моделювання дискретно визначеної еквідистанти на заданій відстані між ребрами еквідистанти та відповідними ребрами дискретно представленої кривої. Порівняльний аналіз обох способів показав, що за другим способом результати обчислень є менш коректними, оскільки заданий параметр

еквідистанти зберігається лише між серединами ребер базової кривої та вершинами еквідистанти, що може призводити до наближення певних частин відповідних ребер еквідистанти до ребер базової кривої. Така похибка в обчисленнях призводить до непередбачуваного потрапляння фортифікаційних споруд до зони ураження. Водночас перевагою другого способу є те, що зі збільшенням кількості точок дискретизації еквідистанти похибка такого наближення зменшується, оскільки дискретна крива все більше наближається до неперервної.

Література.

1. Оленюк Ю. Зображення нерегулярних поверхонь за допомогою еквідистантних ліній. *Вісник Львівського державного університету безпеки життєдіяльності*. 2018. Вип. 18. С. 57–60. DOI: <https://doi.org/10.32447/20784643.18.2018.05>.
2. Мостовенко О. В. Формування дискретних каркасів поверхонь врівноважених покриттів з урахуванням об'єму, що перекривається : дис. ... канд. техн. наук : 05.05.01. Київ : КНУБА, 2014. 175 с.
3. Пустюльга С. І., Самостян В. Р., Хомич А. А. Дискретне векторне формування моделей еквідистантних кривих. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2012. Вип. 90. С. 281–285.
4. Пустюльга С. І., Самостян В. Р., Хомич А. А. Дискретне формування еквідистант до моделей замкнутих кривих апаратом числових послідовностей. *Наукові нотатки ЛНТУ*. 2014. Вип. 44. С. 227–232.
5. Скочко В. І. Спеціальні геометричні моделі процесів, що розвиваються в суцільному середовищі : дис. ... канд. техн. наук : 05.05.01. Київ : КНУБА, 2013. 258 с.
6. Шоман О. В. Використання поверхонь однакового нахилу для одержання сімей паралельних кривих. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2011. Т. 49, вип. 4. С. 11–16.
7. Шоман О. В. Паралельні множини в геометричному моделюванні явищ і процесів : монографія. Харків : НТУ «ХПІ», 2007. 288 с.
8. Amersdorfer M., Meurer T. Equidistant Tool Path and Cartesian Trajectory Planning for Robotic Machining of Curved Freeform Surfaces. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*. 2022. Vol. 19. P. 3311–3323. DOI: <https://doi.org/10.1109/TASE.2021.3117691>.
9. Elber G., Kim M. Euclidean Offset and Bisector Approximations of Curves over Freeform Surfaces. *Computer Aided Geometric Design*. 2020. Vol. 80. Art. 101850. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2020.101850>.
10. Farouki R., Koenig T., Tarabanis K., Korein J., Batchelder J. Path Planning with Offset Curves for Layered Fabrication Processes. *Journal of Manufacturing Systems*. 1995. Vol. 14. P. 355–368. DOI: [https://doi.org/10.1016/0278-6125\(95\)98872-4](https://doi.org/10.1016/0278-6125(95)98872-4).
11. Farouki R., Tarabanis K., Korein J., Batchelder J., Abrams S. Offset Curves in Layered Manufacturing. *Manufacturing Science and Engineering: Volume 2 — Non-Traditional Design and Layered Manufacturing; Rolling*

Technology; Intelligent Machine Tool Systems; Measurement and Inspection of Products and Processes; Non-Traditional Manufacturing Processes of the 1990s : Proceedings of the ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition (Chicago, Illinois, USA, November 6–11, 1994). New York : ASME, 1994. P. 557–566. DOI: <https://doi.org/10.1115/IMECE1994-1109>.

METHODS OF CONSTRUCTING DISCRETELY REPRESENTED EQUIDISTANTS FOR OPTIMIZING THE PLACEMENT OF FORTIFICATION STRUCTURES

Oleksandr Mostovenko, Volodymyr Skochko, Serhii Kozhedub, Oleksii Kotliarevskyi, Andrii Posikera

This study is devoted to the development of an algorithm for geometric modeling of equidistant curves (offset curves) in cases where the base curve is given in discrete form as a set of coordinate points. This approach is of significant importance for architectural and engineering design, geoinformation analysis, spatial modeling, and improving the efficiency of defense technologies that require the determination of safe areas, buffer zones, and functionally optimal placement of defense-related objects, in particular fortification structures. It is especially important that in defense-related problems the input data are often represented in discrete form, for example as coordinates from observation systems, digital maps, or geodetic measurements.

Two methods of geometric modeling of discretely represented equidistants at a specified distance from the edges of a base discretely represented curve (DRC) are proposed. The first method is based on determining the vertices of the equidistant curve by intersecting adjacent edges of the equidistant, constructed using perpendiculars laid off at a given distance from the corresponding edges of the base DRC. The second method defines the equidistant parameter as the distance from a vertex of the equidistant curve to the midpoint of an edge of the base DRC, which allows obtaining another result in the form of coordinates of the equidistant vertices. Both methods enable the construction of both inner and outer equidistants.

Test examples clearly demonstrate the construction of two equidistants at a given distance using both methods, as well as an analysis of special points of the equidistant when the equidistant parameter exceeds the radius of curvature of the base curve, including cusp points on the evolute and a self-intersection point of the equidistant.

The obtained results demonstrate the effectiveness of the proposed methods for modeling geometric objects, particularly in the context of determining rational placement of defense-related objects and spatial analysis. The prospects for further research are identified, aimed at improving methods of geometric modeling of discretely represented equidistants and optimizing computational algorithms to increase accuracy and efficiency.

Keywords: geometric modeling, equidistant curve, discretely represented curve, defense-related objects, fortification structures.

References

1. Oleniuk, Yu. (2018). Image representation of irregular surfaces using equidistant lines. *Visnyk Lvivskoho derzhavnoho universytetu bezpeky zhyttiediialnosti*, 18, 57–60. DOI: <https://doi.org/10.32447/20784643.18.2018.05> [In Ukrainian].
2. Mostovenko, O. V. (2014). Formation of discrete frameworks of equilibrium surfaces considering the enclosed volume. (PhD dissertation, specialty 05.05.01). Kyiv: KNUBA, 175 p. [In Ukrainian].
3. Pustiulha, S. I., Samostian, V. R., & Khomych, A. A. (2012). Discrete vector formation of equidistant curve models. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*, 90, 281–285. [In Ukrainian].
4. Pustiulha, S. I., Samostian, V. R., & Khomych, A. A. (2014). Discrete formation of equidistants to closed curve models using numerical sequence apparatus. *Naukovi notatky LNTU*, 44, 227–232. [In Ukrainian].
5. Skochko, V. I. (2013). Special geometric models of processes developing in a continuous medium. (PhD dissertation, specialty 05.05.01). Kyiv: KNUBA, 258 p. [In Ukrainian].
6. Shoman, O. V. (2011). Application of equal-slope surfaces for constructing families of parallel curves. *Pratsi Tavriiskoho derzhavnoho ahrotekhnolohichnoho universytetu. Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*, 49(4), 11–16. [In Ukrainian].
7. Shoman, O. V. (2007). Parallel sets in geometric modeling of phenomena and processes. Kharkiv: NTU “KhPI”, 288 p. [In Ukrainian].
8. Amersdorfer, M., & Meurer, T. (2022). Equidistant tool path and Cartesian trajectory planning for robotic machining of curved freeform surfaces. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 19, 3311–3323. DOI: <https://doi.org/10.1109/TASE.2021.3117691> [In English].
9. Elber, G., & Kim, M. (2020). Euclidean offset and bisector approximations of curves over freeform surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 80, Article 101850. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2020.101850> [In English].
10. Farouki, R., Koenig, T., Tarabanis, K., Korein, J., & Batchelder, J. (1995). Path planning with offset curves for layered fabrication processes. *Journal of Manufacturing Systems*, 14, 355–368. DOI: [https://doi.org/10.1016/0278-6125\(95\)98872-4](https://doi.org/10.1016/0278-6125(95)98872-4) [In English].
11. Farouki, R., Tarabanis, K., Korein, J., Batchelder, J., & Abrams, S. (1994). Offset curves in layered manufacturing. In *Manufacturing Science and Engineering: Volume 2 — Non-Traditional Design and Layered Manufacturing; Rolling Technology; Intelligent Machine Tool Systems; Measurement and Inspection of Products and Processes; Non-Traditional Manufacturing Processes of the 1990s: Proceedings of the ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition (Chicago, Illinois, USA, November 6–11, 1994)* (pp. 557–566). New York: ASME. DOI: <https://doi.org/10.1115/IMECE1994-1109> [In English].

Матеріал надійшов до редакції 29.04.2026

Прийнято до друку 13.05.2026 р.