УДК 514.18

ПРО ДЕЯКІ ВІДМІННОСТІ УТВОРЕННЯ, ПОЗНАЧЕННЯ І ОПЕРАЦІЙ МІЖ АЛГЕБРАЇЧНИМИ ТА КОМПОЗИЦІЙНИМИ МАТРИЦЯМИ

DOI: 10.33842/2313-125X-2026-29-239-246

Муртазієв Е.Г., канд. пед. наук,
ernest_gaf@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2154-5523
Адоньєв Є.О., д-р. техн. наук,
evgen.adoniev@gmail.com, ORCID: 0000-0003-1279-4138
Золотарьов П.Р.,
p.zolotarov@gmail.com, ORCID: 0009-0000-8065-5311
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (м. Запоріжжя, Україна)
Голова О.О., канд. техн. наук, доцент,
fire19@ukr.net, ORCID: 0000-0001-6984-8673
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» (м. Київ, Україна)

Коротко сформульовано відмінності у призначеннях алгебраїчних та композиційних матриць, якими є, відповідно, операції над лінійними системами та аналітична формалізація дискретно поданих незакономірних геометричних об'єктів. Надається пояснення чому операції з алгебраїчними матрицями являють собою комбінації, а формалізація геометричних об'єктів підкорюється властивостям композиції.

Надано визначення композиційних матриць. Звертається увага на те, що аналітичне подання геометричних об'єктів традиційними методами здійснюється відносно наперед обраної системи координат і навпаки, у композиційному методі геометричного моделювання дискретні об'єкти аналітизуються відносно точок, що його визначають. Наголошується, що саме через це у композиційному методі рівняння геометричних об'єктів запропоновано називати – точковими рівняннями. Надано приклад утворення одновимірної компоматриці точкової, її загальне позначення, її позначення у поелементному та у покоординатних поданнях. Якщо у аналітичній геометрії для аналітизації геометричних об'єктів утворюються функції відносно оптимально обраної системи координат, то у композиційній геометрії аналітичні форми геометричних об'єктів утворюються із застосуванням характеристичних функцій, утворених відносно самого об'єкту. Вказується, що у наших дослідженнях розглядаються два способи параметризації – уздовж супровідні ламаної лінії вихідної кривої та покоординатна. На основі обчислених значень параметрів для кожної точки утворюються характеристичні функції, з *яких складаються компоматриці параметричні, що за розміром та розташуванням елементів збігаються з попередньо створеними компоматрицями точковими. Такий збіг є природнім через те, що обидві компоматриці створюються для однієї кривої лінії.*

Показано яким чином через добуток компоматриць точкової та параметричної утворюється компоматриця кривої лінії як геометричної фігури. Показується відмінність алгоритмів множення композиційних матриць та множення алгебраїчних матриць. Вказується на те, що множення компоматриць є безвідносним щодо вихідної системи координат. І навпаки, множення алгебраїчних матриць виникає в результаті геометричних перетворень зі зміною вихідної системи координат, тобто множення алгебраїчних матриць являє собою результат перенесення системи координат. Показано яким чином із композиційної матриці кривої лінії здійснюється перехід до точкового поліному, що неперервно описує вихідний дискретний точковий ряд.

Ключові слова: композиційні матриці, компоматриці точкові, компоматриці параметричні, компоматриця кривої лінії, характеристичні функції, множення компоматриць, точковий поліном кривої лінії.

Постановка проблеми. Утворення композиційних кривих ліній за наперед визначеним відповідним дискретним рядом точок найпростіше реалізується через застосування композиційних матриць. Нами розроблено компоматриці точкові, компоматриці параметричні, компоматриці кривої лінії як геометричної фігури. Однією із найсильніших теорій в математиці є теорія матриць. Виникає питання, а чому існуючу теорію матриць не застосувати для створення композиційних кривих ліній, навіщо розробляти новий тип матриць?

У запропонованій статті, у порівнянні з традиційними алгебраїчними матрицями, на відмінностях між ними та композиційними матрицями показано необхідність створення та застосування компоматриць для моделювання композиційних кривих ліній за наперед визначеними дискретними точковими рядами.

Отже, проблемою, яка розглядатиметься, буде порівняння визначень матриць і компоматриць, з'ясування різниць між їхніми утвореннями, між їхніми функціями та призначеннями. На підставі виявлених відмінностей показати необхідність створення теорії композиційних матриць.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Композиційне моделювання починало свій розвиток у роботах [1, 2, 3], дістало подальший розвиток у роботах [4, 5, 6, 7]. У роботі [8] розглядається аналітичний опис у точковій формі способу графічного диференціювання плоскої кривої лінії. Однак у наведених роботах не розглядаються питання необхідності введення і розробки композиційних матриць та порівняння їхніх відмінностей від існуючих у математиці матриць.

Формулювання цілей статті. Здійснити порівняльний аналіз відмінностей композиційних матриць і матриць алгебраїчних щодо їхнього утворення, означення та призначення. Обґрунтувати доцільність і необхідність розробки компоматриць.

Основна частина. Якщо алгебраїчні матриці призначені для умовного (стислого) здійснення алгебраїчних операцій та лінійних перетворень над лінійними алгебраїчними системами, то композиційні матриці формалізують в аналітичному вигляді опис незакономірних геометричних об'єктів та операцій над цими об'єктами. Під незакономірними геометричними об'єктами розуміємо нециклічні довільної форми плоскі та просторові криві лінії, поверхні та геометричні тіла, що задані упорядкованими структурованими дискретними наборами точок.

Під структурованою незакономірною, дискретно поданою точками, лінією розумітимемо таку, що позбавлена особливих точок і є однозначною. Якщо сегмент лінії містить особливу точку, то його необхідно розглядати як окремі дві частини: перша – від початку лінії до особливої точки; друга – від особливої точки до кінця сегменту. У разі, коли сегмент лінії є двозначним, то, для його формалізації в аналітичному вигляді, він поділяється на дві однозначні частини.

Якщо аналітичне подання алгебраїчних ліній і подальших їх перетворень здійснюється за використання однієї алгебраїчної матриці для кожної з цих ліній, то для аналітичної формалізації дискретно поданої кривої лінії композиційним методом необхідно мінімум дві матриці – точкова і параметрична. Для відрізнення точкових і параметричних матриць композиційного методу від алгебраїчних матриць у подальшому називатимемо – компоматриця точкова, та компоматриця параметрична (тут: "компоматриця" розкривається як – "композиційна матриця").

Будь-який упорядкований ряд точок, що дискретно подає криву лінію, являє собою композицію точок, у якому зміна положення будь-якої з його точок не тягне за собою необхідності зміни положення решти інших цього ряду. При цьому, змінюються лише значення координат переміщеної точки, а запис характеристичної функції цієї точки лишається без змін. Тобто у компоматриці точковій замінюється лише запис однієї точки, а компоматриця параметрична взагалі не змінюється. Усе сказане обґрунтовує застосування термінів: "композиційний метод", "композиційна інтерполяція", "компоматриця" і таке інше.

І навпаки, алгебраїчні матриці, які застосовують для інтерполяції кривих ліній, що задані дискретним рядом точок, зміна положення будь-якої точки цього ряду призводить до зміни усіх елементів цієї інтерполяційної матриці. Тобто за алгебраїчної інтерполяції дискретного точкового ряду всі точки, що цей ряд складають, являють собою комбінацію точок і як наслідок, на наш погляд, алгебраїчну інтерполяцію можна назвати – комбінаційною інтерполяцією.

Виходячи із сказаного, надамо визначення композиційних матриць.

Композиційна матриця – це прямокутна таблиця чисел або характеристичних функцій, яка формалізує упорядкований дискретний ряд точок і призначена для його подання в аналітичній формі та здійснення необхідних обчислювальних операцій з неперервною кривою, що композиційно інтерполює цей вихідний точковий ряд.

Якщо в традиційній математиці аналітичні рівняння кривих ліній, що проходять через наперед визначені точки, записуються відносно обраної системи координат, то у методі композиційного геометричного моделювання рівняння для упорядкованої дискретної кривої лінії утворюються відносно усіх точок сегментів цієї вихідної дискретної кривої лінії. Саме через це у композиційному методі рівняння геометричних об'єктів називатимемо – точковими рівняннями.

Для кривої лінії створюється однорозмірна (така, що складається з одного рядка чи то одного стовпця) компоматриця точкова, яка у загальному вигляді позначається – $[\![A_{\text{T}}]\!]$. Поелементна компоматриця точкова позначається — $\underset{i=\overline{1,l}}{[\![A_{\text{i}}]\!]}$. Покоординатні компоматриці точкові позначаються – $\underset{i=\overline{1,l}}{[\![A_{\text{i}}(x)]\!]}$, $\underset{i=\overline{1,l}}{[\![A_{\text{i}}(y)]\!]}$, $\underset{i=\overline{1,l}}{[\![A_{\text{i}}(z)]\!]}$.

Покажемо шлях розкриття (згортання) згаданих компоматриць точкових:

$$[\![A_{\text{T}}]\!] \Rightarrow \underset{i=\overline{1,l}}{[\![A_{\text{i}}]\!]} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \underset{i=\overline{1,l}}{[\![A_{\text{i}}(x)]\!]} \\ \underset{i=\overline{1,l}}{[\![A_{\text{i}}(y)]\!]} \\ \underset{i=\overline{1,l}}{[\![A_{\text{i}}(z)]\!]} \end{matrix}\right\}. \qquad (1)$$

Зауважимо, компоматриці точкові формалізують сегмент дискретно поданої кривої лінії замінюючи її дискретною, а координатні компоматриці застосовуються для виконання необхідних обчислень у розв'язанні задач уже з неперервною композиційною кривою лінією. Тобто необхідно створити математичний апарат, який вихідну дискретну криву лінію перетворює в неперервну.

Якщо в аналітичній геометрії для цього утворюється функція в певній системі координат, то у композиційному методі, який пропонується нами, створюватимемо характеристичні функції для кожної з точок вихідної дискретної кривої лінії безвідносно системи координат, в якій ця крива знаходиться. У композиційному методі характеристичні функції створюються в параметричній формі. Ця умова вимагає попередньо параметризувати кожну з точок вихідної дискретної кривої лінії.

У наших дослідженнях параметризація точок застосовується або уздовж ребер дискретної кривої лінії, або покоординатна у довільно обраній системі координат. Створені характеристичні функції об'єднуються у композиційні матриці (компоматриці) параметричні, які за кількістю елементів та їх індексацією мають відповідати попередньо створеній компоматриці точковій для цієї ж дискретної кривої лінії. Позначаються компоматриці параметричні: у загальному вигляді – $[\![A_{\Pi}]\!]$, або, в більш детальному вигляді, із записами елементів – характеристичних функцій – $p_{\mathrm{i}}(t)$:

$$\underset{i=\overline{1,l}}{[\![p_{\mathrm{i}}(t)]\!]},\ 0 \le t \le t_l.$$

Добуток компоматриць точкової на параметричну утворюють компоматрицю кривої лінії, елементами якої є добутки точок на характеристичні функції. При цьому перемножуються лише точки і характеристичні функції з однаковими індексами.

$$[\![A_{\mathrm{T}}]\!] \cdot [\![A_{\Pi}]\!] \Rightarrow [\![A_{\mathrm{T}} \cdot A_{\Pi}]\!] \Rightarrow \underset{i=\overline{1,l}}{[\![A_{\mathrm{i}} \cdot p_{\mathrm{i}}(t)]\!]},\ 0 \le t \le t_l.$$

Або враховуючи (1) можемо записати:

$$\underset{i=\overline{1,l}}{[\![A_{\mathrm{i}} \cdot p_{\mathrm{i}}(t)]\!]} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \underset{i=\overline{1,l}}{[\![A_{\mathrm{i}}(x) \cdot p_{\mathrm{i}}(t)]\!]} \\ \underset{i=\overline{1,l}}{[\![A_{\mathrm{i}}(y) \cdot p_{\mathrm{i}}(t)]\!]} \\ \underset{i=\overline{1,l}}{[\![A_{\mathrm{i}}(z) \cdot p_{\mathrm{i}}(t)]\!]} \end{matrix}\right\},\ 0 \le t \le t_l. \qquad (2)$$

Тут (2) замість $A_{\mathrm{i}}(x)$ можна писати X_{i}; замість $A_{\mathrm{i}}(y) \rightarrow Y_{\mathrm{i}}$; замість $A_{\mathrm{i}}(z) \rightarrow Z_{\mathrm{i}}$.

Отже множення компоматриць точкової на параметричну здійснюється шляхом множення кожної з координат усіх $i = \overline{1,l}$ точок на відповідну характеристичну функцію: $\underset{i=\overline{1,l}}{[\![A_{\mathrm{i}}(x) \cdot p_{\mathrm{i}}(t)]\!]}$ – компоматриця проєкцій на вісь *Ox* усіх базисних точок кривої лінії за певного значення параметру *t* із інтервалу $0 \le t \le t_l$; аналогічно: $\underset{i=\overline{1,l}}{[\![A_{\mathrm{i}}(y) \cdot p_{\mathrm{i}}(t)]\!]}$ – компоматриця проєкцій на вісь *Oy* усіх базисних точок кривої лінії за певного значення параметру *t* у інтервалу $0 \le t \le t_l$; $\underset{i=\overline{1,l}}{[\![A_{\mathrm{i}}(z) \cdot p_{\mathrm{i}}(t)]\!]}$ – компоматриця проєкцій на вісь *Oz* усіх базисних точок кривої лінії за певного значення параметру *t* із інтервалу $0 \le t \le t_l$.

І геть інакше здійснюється множення алгебраїчних матриць. Як відомо, множення алгебраїчної матриці *A* на алгебраїчну матрицю *B* буде визначеним, коли кількість стовпців матриці *A* дорівнює кількості рядків матриці *B* (тобто вони є узгодженими). У цьому випадку добутком матриці $\underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B}$ є алгебраїчна матриця $\underset{m\times n}{C}$, кожен елемент якої являє собою суму добутків елементів i-того рядка матриці *A* на однаково-індексний j-того стовпця матриці *B*:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{i=1}^{k} a_{ik} \cdot b_{kj} \qquad (3)$$

де $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$.

Така відмінність множення композиційних і алгебраїчних матриць викликана тим, що елементи композиційних матриць – $A_{\mathrm{i}} \cdot p_{\mathrm{i}}(t)$ із (2) забезпечують виконання умов композиційної інтерполяції, а елементи алгебраїчних матриць – $\sum_{i=1}^{k} a_{ik} \cdot b_{kj}$ із (3) відповідають умовам здійснення перетворень лінійних систем.

Для отримання із композиційної матриці (2) точкового поліному $L(t)$, який композиційно інтерполює вихідний дискретний точковий ряд, необхідно взяти суму всіх елементів цієї компоматриці (2):

$$L(t) = \sum_{i=1}^{l} A_i \cdot p_i(t)\,, 0 \le t \le t_l\,, \qquad (4)$$

де 0 та t_l – значення параметрів, відповідно, в першій та останній точках вихідного дискретного точкового ряду.

Або (4) в координатних формах поточна точка $L(t)$:

$$\begin{aligned} L_x(t) &= \sum_{i=1}^{l} x_i \cdot p_i(t), \\ L_y(t) &= \sum_{i=1}^{l} y_i \cdot p_i(t), \qquad 0 \le t \le t_l. \qquad (5) \\ L_z(t) &= \sum_{i=1}^{l} z_i \cdot p_i(t), \end{aligned}$$

Сукупність (5) трьох рівнянь визначає поточну точку $L(t)$ на кривій лінії у просторі. Сукупність рівнянь $L_x(t)$, $L_y(t)$ – визначають горизонтальну проекцію; $L_x(t)$, $L_z(t)$ – фронтальна проекція точки $L(t)$; $L_y(t)$, $L_z(t)$ – профільна проекція точки $L(t)$.

Зауважимо, оскільки здійснювалася параметризація точок вихідної дискретної кривої уздовж довжини ланок її супровідної ламаної лінії, то усі розв'язки із використанням кривої лінії $L(t)$ із (2) здійснюються відносно неї самої і тому операції з композиційними кривими лініями є індиферентними щодо обрання системи координат. Або іншими словами, навколо лінії $L(t)$ можна обрати незліченну кількість систем координат – розв'язки задач лишатимуться незмінними. Обрання системи координат просто унаочнює розв'язки. При цьому ще і характеристичні функції $p_i(t)$ у параметричній формі є інваріантами паралельного проєктування, через це вони також лишаються без змін у будь-якій системі координат. Тобто у характеристичних функцій $p_i(t)$ не змінюються ні записи, ні значення.

Висновки. Розглянуто деякі відмінності між традиційними і композиційними матрицями та дійшли таких висновків.

1. Традиційні матриці призначені для операцій над комбінаційними системами, а композиційні матриці застосовуються для дискретних композицій точок, що вказує на необхідність розробки теорії композиційних матриць.

2. За використання традиційних матриць утворюються аналітичні описи дискретно поданих кривих ліній відносно наперед обраної системи координат. Аналітичний опис композиційних кривих здійснюється в параметричній формі відносно точок самої дискретної кривої, що значно спрощує застосування компокривих у подальших обчислювальних операціях.

3. На основі аналізу відмінностей між матрицями та компоматрицями встановлено необхідність введення композиційних матриць для композиційної інтерполяції просторових дискретно поданих кривих ліній. Композиційні лінії є індиферентними щодо систем координат, що набагато спрощує аналітичні описи кривих ліній і геометричних об'єктів в цілому та дозволяє узагальнити алгоритми опису незакономірних геометричних поверхонь і незакономірних геометричних тіл.

Література

1. Адоньєв Є. О. Композиційний метод геометричного моделювання багатофакторних систем : дис. ... д-ра техн. наук. Київ : КНУБА, 2018. 512 с.
2. Верещага В. М. Композиційне геометричне моделювання : монографія. Мелітополь : ФОП Однорог Т. В., 2017. 108 с.
3. Верещага В. М., Найдиш А. В., Адоньєв Є. О., Лисенко К. Ю. Основи композиційного геометричного моделювання : навч. посіб. Мелітополь : ФОП Однорог Т. В., 2019. 255 с.
4. Лисенко К. Ю. Теоретичні основи методів утворення композиційних ліній і поверхонь : дис. ... канд. техн. наук. Київ : КНУБА, 2022. 267 с.
5. Павленко О. М. Порівняльний аналіз композиційної інтерполяції з традиційними методами. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2022. Вип. 103. С. 162–174. DOI: https://doi.org/10.32347/0131-579X.2022.103.162-174
6. Павленко О. М. Параметричні композиційні матриці. *Обухівські читання : зб. тез доп. XVII Міжнар. наук.-практ. конф.* (30 берез. 2023 р., Київ). Київ, 2023. С. 91–96.
7. Лисенко К. Ю. Точкові композиційні матриці. *Обухівські читання : зб. тез доп. XVII Міжнар. наук.-практ. конф.* (30 берез. 2023 р., Київ). Київ, 2023. С. 97–99.

8. Верещага В. М., Лисенко К. Ю., Адоньєв Є. О., Муртазієв Е. Г., Верещага І. В., Воліна Т. М. Аналітичний опис у точковій формі способу графічного диференціювання плоскої кривої лінії. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2025. Т. 6, № 1 (138). С. 54–63. DOI: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2025.343387

ON SOME DIFFERENCES IN THE FORMATION, NOTATION AND OPERATIONS BETWEEN ALGEBRAIC AND COMPOSITIONAL MATRICES

Ernest Murtaziiev, Yevhen Adoniev, Pavlo Zolotarov, Olga Golova

The differences in the purposes of algebraic and compositional matrices are briefly formulated: these are, respectively, operations on linear systems and the analytical formalization of discretely represented irregular geometric objects. An explanation is provided as to why operations with algebraic matrices represent combinations, while the formalization of geometric objects obeys the properties of composition.

A definition of compositional matrices is given. Attention is drawn to the fact that the analytical representation of geometric objects by traditional methods is carried out relative to a pre-selected coordinate system, and conversely, in the compositional method of geometric modeling, discrete objects are analytically described relative to the points that define them. It is emphasized that it is precisely for this reason that the equations of geometric objects in the compositional method are proposed to be called — point equations. An example of the formation of a one-dimensional point compomatrix is provided, along with its general notation, its notation in element-wise and coordinate-wise representations. Whereas in analytical geometry, functions for the analytical description of geometric objects are formed relative to an optimally chosen coordinate system, in compositional geometry the analytical forms of geometric objects are formed using characteristic functions constructed relative to the object itself. It is noted that in our research two methods of parameterization are considered — along the accompanying polyline of the source curve and coordinate-wise. Based on the computed parameter values for each point, characteristic functions are formed, from which parametric compomatrices are composed, matching the previously created point compomatrices in size and arrangement of elements. Such a correspondence is natural, since both compomatrices are created for the same curve.

It is shown how the compomatrix of a curve as a geometric figure is formed through the product of the point and parametric compomatrices. The difference between the multiplication algorithms of compositional matrices and algebraic matrices is demonstrated. It is indicated that the multiplication of compomatrices is independent of the original coordinate system. Conversely, the multiplication *of algebraic matrices arises as a result of geometric transformations with a change of the original coordinate system, that is, the multiplication of algebraic matrices represents the result of a coordinate system transformation. It is shown how the transition from the compositional matrix of a curve to the point polynomial that continuously describes the original discrete point sequence is carried out.*

Keywords: compositional matrices, point compomatrices, parametric compomatrices, compomatrix of a curve, characteristic functions, multiplication of compomatrices, point polynomial of a curve.

References

1. Adoniev, Ye.O. (2018) Compositional method of geometric modeling of multifactor systems: doctor's thesis. Kyiv: KNUBA. [in Ukrainian].
2. Vereshchaha, V.M. (2017) Compositional geometric modeling: monohrafiia. Melitopol: FOP Odnoroh T.V. [in Ukrainian].
3. Vereshchaha, V.M., Naidysh, A.V., Adoniev, Ye.O., Lysenko, K.Yu. (2019) Fundamentals of compositional geometric modeling: a textbook. Melitopol: FOP Odnoroh T.V. [in Ukrainian].
4. Lysenko, K.Yu. (2022) Theoretical foundations of methods for creating compositional lines and surfaces: candidate's thesis. Kyiv: KNUBA. [in Ukrainian].
5. Pavlenko, O.M. (2022) Comparative analysis of compositional interpolation with traditional methods. Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika, vol. 103, pp. 162–174. [in Ukrainian].
6. Pavlenko, O.M. (2023) Parametric compositional matrices. Zbirnyk tez dopovidei XVII Mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii «Obukhivski chytannia», 30 March 2023. Kyiv: NUBIP, pp. 91–96. [in Ukrainian].
7. Lysenko, K.Yu. (2023) Point compositional matrices. Zbirnyk tez dopovidei XVII Mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii «Obukhivski chytannia», 30 March 2023. Kyiv: NUBIP, pp. 97–99. [in Ukrainian].
8. Vereshchaha, V., Lysenko, K., Adoniev, Ye., Murtaziev, E., Vereshchaha, I., & Volina, T. (2025) Analytical description in point form of the method of graphical differentiation of a plane curve. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 6(1(138)), pp. 54–63.

Матеріал надійшов до редакції 12.04.2026

Прийнято до друку 13.05.2026 р.