

УДК 514.18

ДЕЯКІ КРИВІ У ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ, ОПИСАНІ У ФУНКЦІЇ НАТУРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

DOI: 10.33842/2313-125X-2026-29-239-246

Несвідомін А.В., канд. техн. наук, докторант*

a.nesvidomin@gmail.com, ORCID: 0000-0002-9227-4652

Пилипака С.Ф., д-р. техн. наук,

psf55@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1496-4615

Федорина Т.П., канд. пед. наук,

fedoryna@gmail.com, ORCID: 0000-0002-8854-3768*Національний університет біоресурсів і природокористування України
(м. Київ, Україна)*

Аналітичний опис кривих у функції довжини їх дуги, тобто у функції натурального параметра, має принципове значення. Довжина дуги є внутрішньою характеристикою кривої разом із її натуральним рівнянням, яке описує залежність кривини від її довжини. Натуральне рівняння повністю задає плоску криву незалежно від її розміщення в системі координат. Для просторових кривих для їх визначення додатково необхідно мати залежність скруту від довжини дуги. Якщо одна залежність для плоскої кривої або дві для просторової задані, це ще не означає можливість побудови самої кривої. Це викликано розв'язуванням диференціальних рівнянь, які, як правило, потребують чисельних методів інтегрування. Але якщо є параметричні рівняння з незалежною змінною – довжиною дуги, то залежності кривини і скруту завжди можна знайти. Опис кривої у функції натурального параметра зручно використовувати у механіці, теорії руху частинок, робототехніці та застосуванні фундаментальних формул Френе у диференціальній геометрії.

Окремий клас кривих – криві, описані в полярній системі координат. Як правило, в ній описуються різні спіралі. Однак багато із них не можна описати через натуральний параметр. До них відносяться спіралі Архімеда, Галілея, Ферма та інші. В статті проведено дослідження спіралей і інших кривих, які описуються в полярній системі координат і при цьому їх незалежною змінною є натуральний параметр. При традиційному описі кривих у полярній системі незалежною змінною є полярний кут. В даному дослідженні полярний кут, як і радіус-вектор, є функціями довжини дуги кривої. Для знаходження однієї функції іншу потрібно задати. Це призводить до розв'язування диференціального рівняння або часткового випадку – інтегрування відповідного виразу. Показано, що у логарифмічній спіралі величина радіус-вектора прямо

* Науковий консультант – д-р. техн. наук, професор Пилипака С.Ф.

пропорціональна довжині її дуги, а також знайдено спіраль із обернено пропорціональною залежністю.

Ключові слова: спіралі, радіус-вектор, полярний кут, натуральний параметр, диференціальне рівняння.

Постановка проблеми. Зазвичай у полярній системі координат описують спіралі. При цьому задають залежності зміни радіус-вектора від полярного кута або ж полярного кута від радіус-вектора. До них відносяться спіралі Архімеда, Галілея, Ферма та інші. Однак їх не можна описати параметричними рівняннями у функції довжини дуги. До відомих спіралей, які дозволяють таку параметризацію, відноситься логарифмічна спіраль і евольвента кола, яка за визначенням не є спіраллю, бо закручується не навколо полюса, але за формою подібна до неї. Виявлення спіралей у функції натурального параметра дозволить поповнити клас таких кривих. Від них легко перейти до просторових кривих укусу теж у функції натурального параметра. Крім того, для таких кривих значно спрощуються формули для знаходження кривини і скруту.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Спіралі за своєю формою вділяються серед множини інших кривих. Вони відіграють певну роль в мистецтві та архітектурі. В праці [3] проаналізовано, як їх кривина та кривизна впливають на сприйняття архітектурних форм та творів мистецтва. В праці [5] розглянуті різні типи спіралей і виведено такі параметри, як довжина дуги, площа сектора та радіус кривини для кожного типу. Також наведені параметричні рівняння і рівняння в полярних та декартових координатах. Еволюцію побудови спіралей від перших описів Архімеда досліджено в праці [2]. Проведено аналіз того, які математичні задачі змушували вчених шукати нові типи спіралей. В праці [4] досліджується застосування геометрії спіралей до опису структури Всесвіту.

Формулювання цілей статті. Метою статті є конструювання плоских кривих у полярній системі координат, коли радіус-вектор і полярний кут є функціями їх довжини дуги.

Основна частина. Розглянемо полярне рівняння кривої $\rho = \rho(\varphi)$ для випадку, коли радіус-вектор $\rho = \rho(s)$ і $\varphi = \varphi(s)$, де s – довжина дуги кривої. Перейдемо до параметричних рівнянь кривої:

$$x = \rho(s) \cos \varphi(s); \quad y = \rho(s) \sin \varphi(s). \quad (1)$$

Продиференціюємо рівняння (1) по змінній s :

$$x' = \rho' \cos \varphi - \varphi' \rho \sin \varphi; \quad y' = \rho' \sin \varphi + \varphi' \rho \cos \varphi. \quad (2)$$

Якщо параметричні рівняння описують криву у функції довжини дуги, то сума квадратів їх похідних дорівнює одиниці. Отже, можна записати:

$$x'^2 + y'^2 = \rho'^2 + \rho^2 \varphi'^2 = 1. \quad \text{Звідси} \quad \varphi = \int \frac{\sqrt{1 - \rho'^2}}{\rho} ds. \quad (3)$$

Задача полягає в знаходженні такої залежності $\rho = \rho(s)$, щоб можна

було проінтегрувати вираз (3). Перешкодою для цього є наявність квадратного кореня, що затрудняє знаходження таких залежностей. При $\rho = \text{const}$ буде коло. Найпростіша залежність – лінійна $\rho = a \cdot s$. Інтегрування виразу (3) при $\rho = a \cdot s$ дає залежність кута φ , яка наведена в табл. 1 в першій стрічці. Як з'ясувалося, цією кривою є логарифмічна спіраль. Таким чином, у неї величина радіус-вектора прямо пропорційна довжині дуги кривої. Постає питання, чи можна знайти спіраль, у якої величина радіус-вектора є обернено пропорційною довжині дуги. Така спіраль існує і дані для її побудови наведені в третій стрічці табл. 1. Взагалі відомими прикладами спіралей, у яких незалежною змінною є довжина дуги, є логарифмічна спіраль (табл. 1, стрічка 1) і евольвента кола (табл. 1, стрічка 5). Окрім спіралі (3) вдалося знайти ще одну спіраль (табл. 1, стрічка 4), які певним чином подібні між собою (рис. 1).

Таблиця 1

Характерні залежності кривих, заданих у полярній системі координат у функції натурального параметра

$N_{\text{б}}$ n/n	$\rho = \rho(s)$	$\varphi = \varphi(s)$	$k = k(s)$	Крива
1	as	$\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \ln s$	$k = \frac{\sqrt{1-a^2}}{as}$	Логарифмічна спіраль
2	$\frac{\sin as}{a}$ або $\frac{\cos as}{a}$	as	$k = 2a$	Коло радіуса $1/2a$, яке проходить через полюс
3	$\frac{a}{s}$	$\frac{1}{2a} \left(\sqrt{s^4 - a^2} - a \operatorname{Arccos} \frac{a}{s^2} \right)$	$k = \frac{s^4 - 3a^2}{as\sqrt{s^4 - a^2}}$	Спіраль
4	e^{-s}	$\sqrt{e^{2s} - 1} - \operatorname{Arccos} e^{-s}$	$k = \frac{e^{2s} - 2}{\sqrt{e^{2s} - 1}}$	Спіраль
5	$\sqrt{a(a + 2s)}$	$\sqrt{\frac{2s}{a}} - \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{2s}{a}}$	$k = \frac{1}{\sqrt{2as}}$	Евольвента кола
6	$\sqrt{a^2 + s^2}$	$\operatorname{Arctg} \frac{s}{a}$	$k = 0$	Пряма на відстані a від полюса
7	Sinhs	is	$k = 2i$	Уявне коло

Однією із характеристик спіралі є кут ε між нею і радіус-вектором. Напрямок радіус-вектора задається полярним кутом φ , а другий напрям – дотичною до спіралі при поточному значенні дуги s . Виходячи із цього,

знаходимо:

$$\varepsilon = \text{Arc cos } \rho' . \quad (4)$$

Таким чином, для логарифмічної спіралі кут ε є сталим, для всіх інших спіралей – змінний.

Через полярні координати і їх похідні можна визначити натуральне рівняння спіралі в загальному вигляді. Оскільки незалежною змінною рівнянь (1) є натуральний параметр s , то кривина знаходиться через їх другі похідні:

$$k = \sqrt{x''^2 + y''^2} = \sqrt{(\rho'' - \rho\varphi'^2)^2 + 4\rho'\varphi'(\rho\varphi'' + \rho'\varphi')} + \rho^2\varphi''^2 . \quad (5)$$

На рис. 1,а побудована спіраль № 3 в табл. 1, а на рис. 1,б – спіраль № 4. Їх об'єднують спільні властивості: вони мають точки перегину, позначені колами, і визначену область існування, зумовлену допустимими значеннями підкореневого виразу у натуральних рівняннях. Крім того, при зростанні довжини дуги s радіус-вектор зменшується, тобто точка рухається до початку координат, закручуючись навколо нього.

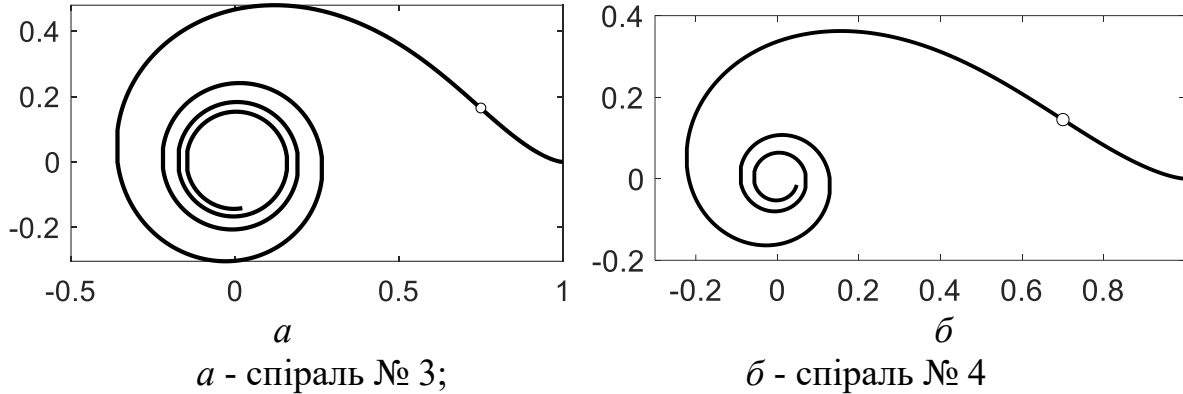


Рис. 1. Спіралі, для яких залежності $\rho=\rho(s)$, $\varphi=\varphi(s)$ і $k=k(s)$ наведені в табл.

Значення параметра s , яке відповідає точці перегину, знаходиться прирівнюванням натурального рівняння до нуля (в нашому випадку – чисельників цих рівнянь). Відомий стандартний перехід від натурального рівняння до параметричних. Наприклад, при такому переході від натурального рівняння спіралі № 4 до параметричних отримуємо:

$$\begin{aligned} x &= e^{-2s} \left(\sqrt{e^{2s} - 1} \sin \sqrt{e^{2s} - 1} + \cos \sqrt{e^{2s} - 1} \right); \\ y &= -e^{-2s} \left(\sqrt{e^{2s} - 1} \cos \sqrt{e^{2s} - 1} - \sin \sqrt{e^{2s} - 1} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Що цікаво, такий перехід для спіралі № 3 здійснити не вдається, хоча параметричні рівняння існують у вигляді (1). Існуючі програмні продукти не можуть проінтегрувати в символічному вигляді відповідні залежності.

Ще один спосіб побудови плоских спіралей полягає у знаходженні ліній укусу на поверхнях обертання. Горизонтальна проекція такої лінії буде спіраллю. І навпаки, якщо на спіралі, як на горизонтальній проекції, побудувати лінію укусу, то вона буде розташована на поверхні обертання.

Наприклад, для логарифмічної спіралі поверхнею обертання буде конус, для евольвенти кола – параболоїд обертання. Якщо лінія укосу описана у функції довжини дуги, то її горизонтальну проекцію теж можна описати у функції довжини дуги, оскільки між їх довжинами існує лінійна залежність. Розглянемо сказане на поверхні кулі. Параметричні рівняння кривої укосу на поверхні кулі одиничного радіуса наведені в праці [1]:

$$\begin{aligned}x &= a \sin \gamma \cos a\gamma - \cos \gamma \sin a\gamma; \\y &= -a \cos \gamma \cos a\gamma - \sin \gamma \sin a\gamma; \\z &= \sqrt{1-a^2} \cos a\gamma,\end{aligned}\tag{6}$$

де γ – незалежна змінні; a – стала, від якої залежить кут підйому кривої укосу.

Знайдемо довжину s сферичної кривої укосу (6). Для цього визначаємо похідні рівнянь (6):

$$\begin{aligned}x' &= (1-a^2) \sin \gamma \sin a\gamma; \\y' &= -(1-a^2) \cos \gamma \sin a\gamma; \\z' &= -a \sqrt{1-a^2} \sin a\gamma.\end{aligned}\tag{7}$$

За відомою формулою знаходимо:

$$\frac{ds}{d\gamma} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{1-a^2} \sin a\gamma.\tag{8}$$

Інтегруванням виразу (8) знаходимо:

$$s = \int \sqrt{1-a^2} \sin a\gamma d\gamma = -\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \cos a\gamma\tag{9}$$

Із (9) знаходимо залежність $\gamma = \gamma(s)$:

$$\gamma = -\frac{1}{a} \operatorname{Arccos} \left(-\frac{as}{\sqrt{1-a^2}} \right).\tag{10}$$

Підстановка (10) у (6) дає параметричні рівняння сферичної кривої укосу у функції натурального параметра – довжини дуги s кривої.

$$\begin{aligned}x &= -\sqrt{1-\frac{a^2 s^2}{1-a^2}} \cos \left[\frac{1}{a} \operatorname{Arccos} \left(\frac{-as}{\sqrt{1-a^2}} \right) \right] - \frac{a^2 s}{\sqrt{1-a^2}} \sin \left[\frac{1}{a} \operatorname{Arccos} \left(\frac{-as}{\sqrt{1-a^2}} \right) \right]; \\y &= -\sqrt{1-\frac{a^2 s^2}{1-a^2}} \sin \left[\frac{1}{a} \operatorname{Arccos} \left(\frac{-as}{\sqrt{1-a^2}} \right) \right] + \frac{a^2 s}{\sqrt{1-a^2}} \cos \left[\frac{1}{a} \operatorname{Arccos} \left(\frac{-as}{\sqrt{1-a^2}} \right) \right]; \\z &= -as.\end{aligned}\tag{11}$$

Із рівнянь (11) можна визначити кут підйому β як кут між віссю z і дотичною до кривої за відомою залежністю:

$$\sin \beta = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = -a.\tag{12}$$

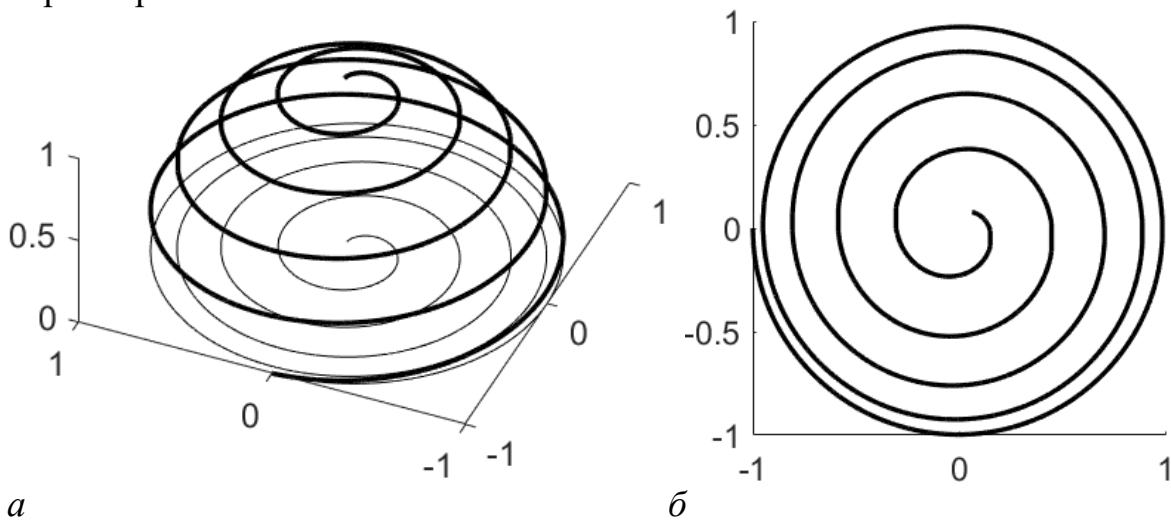
Варто взяти до уваги, що в підкореному виразі рівності (12) буде

одиниця, оскільки рівняння (11) описані у функції довжини дуги s .

Перейдемо до знаходження горизонтальної проекції кривої укусу, яка буде описана у функції довжини власної дуги. Позначимо довжину дуги горизонтальної проекції через S . Її відношення до довжини дуги s кривої укусу запишеться наступним чином: $S/s = \cos \beta = \sqrt{1-a^2}$. Звідси знаходимо: $s = S/\sqrt{1-a^2}$. Підставляємо цей вираз у перші два рівняння (11) і отримуємо:

$$\begin{aligned} x &= -\sqrt{1-\frac{a^2 S^2}{(1-a^2)^2}} \cos\left[\frac{1}{a} \operatorname{Arccos}\left(\frac{-aS}{1-a^2}\right)\right] - \frac{a^2 S}{1-a^2} \sin\left[\frac{1}{a} \operatorname{Arccos}\left(\frac{-aS}{1-a^2}\right)\right]; \\ y &= -\sqrt{1-\frac{a^2 S^2}{(1-a^2)^2}} \sin\left[\frac{1}{a} \operatorname{Arccos}\left(\frac{-aS}{1-a^2}\right)\right] + \frac{a^2 S}{1-a^2} \cos\left[\frac{1}{a} \operatorname{Arccos}\left(\frac{-aS}{1-a^2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Перевірка показує, що сума квадратів похідних рівнянь (13) дорівнює одиниці, що свідчить про те, що змінна S є натуральним параметром.



a - сферична крива укусу та її горизонтальна проекція в аксонометрії;
 b - горизонтальна проекція, яка має вигляд спіралі

Рис. 2. Криві, побудовані за рівняннями (11) і (13) при $a=0,05$ ($\beta=3^\circ$):

У знайденої спіралі із зростанням довжини дуги S точка по кривій рухається до початку координат, тобто радіус вектор зменшується. Це робить її подібною до спіралей №3 і №4 (рис. 1). При зростанні параметра S настає гранична точка, після якої спіралі не існує. Це пояснюється тим, що криву укусу із заданим кутом підйому на кулі можна побудувати в обмеженій області. Крива не може дійти до полюса кулі, причому ближче до нього наближаються криві із меншим кутом підйому. При значеннях a , близьких до одиниці, може бути побудована невелика дуга, яку за формою не можна вважати спіраллю.

Висновки. Серед відомих спіралей тільки дві можуть бути описані параметричними рівняннями у функції довжини власної дуги. До них

відносяться логарифмічна спіраль і евольвента кола. Застосування полярної системи координат дозволило знайти ще дві спіралі, описаних у функції натурального параметра. Їх особливістю є наявність точки перегину, а також те, що із зростанням довжини дуги радіус-вектор зменшується. У одній із них величина радіус-вектора є обернено пропорційною довжині дуги на противагу логарифмічній спіралі, у якої така залежність є прямо пропорційною.

Розглянуто побудову спіралей, як горизонтальних проекцій кривих укусу на поверхнях обертання. Однак не всі поверхні обертання допускають знаходження на них кривих укусу у функції натурального параметра. Якщо ж така крива існує, то горизонтальну проекцію, яка є спіраллю, теж можна описати у функції натурального параметра, оскільки між довжинами дуг кривої укусу і її горизонтальної проекції існує лінійна залежність. Приклад такої побудови продемонстровано на прикладі кулі.

Література

1. Nesvidomin A., Pylypaka S., Volina T., Kalenyk M., Shuliak I., Semirnenko Y., Tarelnyk N., Hryshchenko I., Kholodniak Y., Sierykh L. Constructing geometrical models of spherical analogs of the involute of a circle and cycloid. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2023. Vol. 4, No. 7(124). P. 6–12. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.285514>.
2. O'Connor J. J., Robertson E. F. Spiral curves // MacTutor History of Mathematics Archive. University of St Andrews. 2022. URL: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/Curves/> (дата звернення: 13.04.2026).
3. Tsuji K., Müller S. C. Spirals, Their Types and Peculiarities // *Spirals and Vortices: In Culture, Nature, and Science*. Cham : Springer, 2019. P. 91–124. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-05798-5_6.
4. Vila-Costas M. B., Casuso E. The geometry of spiral arms in galaxies: A quantitative analysis. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2019. Vol. 486, No. 1. P. 639–654. DOI: <https://doi.org/10.1093/mnras/stz884>.
5. Weisstein E. W. Spiral // MathWorld – A Wolfram Web Resource. URL: <https://mathworld.wolfram.com/Spiral.html> (дата звернення: 13.04.2026).

SOME CURVES IN THE POLAR COORDINATE SYSTEM DEFINED BY A FUNCTION OF THE NATURAL PARAMETER

Andrii Nesvidomin, Serhii Pylypaka, Tetiana Fedoryna

Analytical description of curves as a function of their arc length, that is, as a function of a natural parameter, is of fundamental importance. The arc length is an internal characteristic of a curve together with its natural equation, which describes the dependence of curvature on its length. The natural equation completely defines a plane curve regardless of its location in the coordinate

system. For spatial curves, in order to define them, it is additionally necessary to have a dependence of torsion on the arc length. If one dependence for a plane curve or two for a spatial curve are given, this does not mean that the curve itself can be constructed. This is due to the solution of differential equations, which, as a rule, require numerical integration methods. But if there are parametric equations with an independent variable - the arc length, then the dependences of curvature and torsion can always be found. The description of a curve as a function of a natural parameter is convenient to use in mechanics, particle motion theory, robotics, and the application of fundamental Frenet formulas in differential geometry.

A separate class of curves is curves described in the polar coordinate system. As a rule, various spirals are described in it. However, many of them cannot be described in terms of a natural parameter. These include the spirals of Archimedes, Galileo, Fermat, and others. The article studies spirals and other curves that are described in the polar coordinate system and their independent variable is a natural parameter. In the traditional description of curves in the polar system, the independent variable is the polar angle. In this study, the polar angle, like the radius vector, are functions of the arc length of the curve. To find one function, the other must be specified. This leads to solving a differential equation or, in a partial case, integrating the corresponding expression.

References

1. Nesvidomin, A., Pylypaka, S., Volina, T., Kalenyk, M., Shuliak, I., Semirnenko, Y., Tarellyk, N., Hryshchenko, I., Kholodniak, Y., & Sierykh, L. (2023). Constructing geometrical models of spherical analogs of the involute of a circle and cycloid. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 4(7(124)), 6–12. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.285514> [In English].
2. O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (2022). Spiral curves. MacTutor History of Mathematics Archive, University of St Andrews. URL: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/Curves/> (accessed: 13.04.2026) [In English].
3. Tsuji, K., & Müller, S. C. (2019). Spirals, their types and peculiarities. In *Spirals and Vortices: In Culture, Nature, and Science* (pp. 91–124). Cham: Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-05798-5_6 [In English].
4. Vila-Costas, M. B., & Casuso, E. (2019). The geometry of spiral arms in galaxies: A quantitative analysis. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 486(1), 639–654. DOI: <https://doi.org/10.1093/mnras/stz884> [In English].
5. Weisstein, E. W. Spiral. MathWorld – A Wolfram Web Resource. URL: <https://mathworld.wolfram.com/Spiral.html> (accessed: 13.04.2026) [In English].

Матеріал надійшов до редакції 13.04.2026

Прийнято до друку 13.05.2026 р.