

УДК 514.18

**МАТЕМАТИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ОБРОБКИ  
ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ У ВИЗНАЧЕННІ ПАРАМЕТРІВ  
НЕДОСТУПНОЇ ТОЧКИ ОБ'ЄКТА БУДІВНИЦТВА**

DOI: 10.33842/2313-125X-2026-29-247-257

Панченко В.І.,

[gb126t@gmail.com](mailto:gb126t@gmail.com), ORCID: 0000-0002-5939-832X

*Відокремлений структурний підрозділ «Одеський фаховий коледж комп'ютерних технологій Одеського національного університету імені І. І. Мечникова» (м. Одеса, Україна)*

*У статті розглянуто проблему визначення параметрів недоступних точок об'єктів будівництва на основі обробки експериментальних геодезичних даних. Актуальність дослідження зумовлена необхідністю автоматизованого отримання геометричних параметрів будівель і споруд під час реконструкції, реставрації та створення інформаційних моделей об'єктів будівництва в умовах впровадження ВІМ-технологій і переходу до параметричного нормування. Особливої важливості ця задача набуває під час обстеження об'єктів культурної спадщини та аварійних споруд, де прямий доступ до окремих конструктивних елементів є неможливим або небезпечним.*

*Проаналізовано недоліки класичних геометричних моделей, які базуються на використанні пересічних візирних променів. Показано, що в реальних умовах через похибки вимірювань такі промені стають мимобіжними, що призводить до неоднозначності результатів та появи значної кількості можливих варіантів координат визначуваної точки. Для усунення зазначеного протиріччя запропоновано комбіновану тривимірну геометричну модель, яка враховує найбільш загальні умови розташування досліджуваного об'єкта відносно геодезичного обладнання та дозволяє визначати параметри точок, розташованих вище, нижче або на рівні нульової горизонтальної площини.*

*Розроблено математичне забезпечення обробки експериментальних даних, основу якого становить оптимізаційний підхід до визначення координат недоступних точок. Задачу зведено до пошуку мінімальної відстані між мимобіжними прямими, що відповідають візирним променям, із подальшим розв'язанням системи рівнянь методом Крамера. Запропоновано структуру математико-алгоритмічного забезпечення, яка включає сім взаємопов'язаних блоків: визначення координат вихідних точок, розрахунок областей локалізації недоступних точок, обчислення координат і цільових параметрів, оцінювання абсолютних і відносних похибок, адаптивне коригування параметрів вимірювань та реєстрацію результатів. Особливістю розробленого алгоритму є можливість*

*адаптивного керування похибкою шляхом уточнення кутових параметрів у межах допустимих похибок вимірювань.*

*Наведено приклад застосування розробленого математичного забезпечення для визначення координат двох недоступних точок, розташованих на одному перпендикулярі до горизонтальної площини. Отримані результати підтверджують універсальність, стійкість та однозначність запропонованого підходу порівняно з традиційними методами. Практична цінність дослідження полягає у створенні теоретичного підґрунтя для автоматизації геодезичних вимірювань, інтеграції результатів у САД/ВІМ-системи та підтримки сучасних процесів цифрової трансформації будівельної галузі.*

*Ключові слова: об'єкт будівництва; недоступна точка; комбінована геометрична модель; мимобіжні візирні промені; математичне забезпечення; оптимізаційний підхід; адаптивний алгоритм; ВІМ.*

**Постановка проблеми.** Формування паспорта реконструйованих або відновлюваних історичних об'єктів передбачає визначення їх геометричних параметрів. Такими параметрами є висота об'єкта та розміри охоронної зони. У 2020 році в Україні вийшла «Зелена книга. Системний перегляд ефективності державного регулювання. *Параметричне нормування у будівництві*», яка визначає стратегічний напрямок розвитку будівельної галузі – перехід від розпорядчого до параметричного методу нормування та впровадження *ВІМ-технологій*. *ВІМ-модель* потребує автоматизованого наповнення параметрами кожного елемента споруди. Особливо гостро ця проблема стоїть для об'єктів культурної спадщини, зокрема в історичному центрі Одеси (зона ЮНЕСКО), де прямий контакт ускладнений або неможливий через аварійний стан будівель. Тому створення математичного апарату для автоматизованого визначення геометричних параметрів за непрямыми даними є актуальним науково-прикладним завданням.

Постійно зростаючі вимоги до точності визначення параметрів історичних об'єктів породжують необхідність удосконалення використовуваних геометричних та аналітичних моделей. Класичний підхід до визначення координат *недоступної точки*, який базується на геометричній моделі з пересічними візирними променями, в реальних умовах (через неминучі похибки вимірювань кутів і базису) виявляється некоректним: промені не перетинаються, а є *мимобіжними*, що призводить до 18 можливих варіантів координат і робить задачу погано обумовленою. Отже, існує об'єктивне протиріччя між необхідністю отримання однозначного та стійкого геометричного розв'язку та неможливістю його забезпечити в рамках існуючої моделі.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Теоретичним основам геометричного моделювання присвячено праці провідних українських учених – В.Є. Михайленка, В.В. Ваніна, С.М. Ковальова, О.Ю. Браїлова та

ін. [1–3]. У роботах [2, 10, 11] обґрунтовано перехід від моделі з пересічними променями до моделі з *мимобіжними променями*, що дає змогу звести задачу до пошуку мінімальної відстані між двома прямими. Відомі методи лазерного сканування [5, 6] забезпечують високу точність, але потребують дорогого обладнання та складної постобробки «хмар точок», що обмежує їх застосування в оперативних умовах (протиаварійні заходи, швидке обстеження). Сучасна державна політика України, закріплена в «Зеленій книзі» [9], визначає перехід до параметричного нормування та впровадження *ВІМ-технологій*, що потребує створення математичного апарату для автоматизованого визначення геометричних параметрів за непрямыми даними. У попередніх публікаціях [7, 8, 10–11] розроблено окремі складові такого апарату: раціональну прив'язку, оптимізаційну модель, *адаптивний алгоритм*. Однак залишається відкритим питання комплексного *математичного забезпечення комбінованої геометричної моделі*, яка охоплює випадки, коли об'єкт може розташовуватися вище, нижче або перетинати нульову горизонтальну площину.

**Формулювання цілей статті.** Мета дослідження - розробити математичне забезпечення (геометричну модель та алгоритмічне забезпечення) для обробки експериментальних даних при визначенні параметрів недоступної точки об'єкта будівництва на основі комбінованої геометричної моделі. Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні задачі:

1. Розробити *комбіновану геометричну модель* для найбільш загального взаємного розташування досліджуваного компонента об'єкта відносно геодезичного обладнання.
2. Розробити структуру алгоритмічного забезпечення обробки експериментальних даних.
3. Визначити зміст кожного структурного блоку розробленого *математичного забезпечення*.

**Основна частина.** Нехай розв'язується задача визначення координат двох *недоступних точок*  $S$  та  $S'$ , розташованих на перпендикулярі до горизонтальної площини  $\Pi_1$  (рис. 1). Відповідно до розробленої *комбінованої геометричної моделі* вимірювань прямими вимірюваннями отримують шість параметрів: кути  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma'$ ,  $\beta$  та відстань  $AB$ .

*Примітка.*  $\alpha$  – кут між візирним променем  $AD$ , спрямованим у точку  $S$ , та віссю  $Oy$  (горизонтальною площиною  $\Pi_1$ ).  $\alpha'$  – кут між візирним променем  $AD'$ , спрямованим у точку  $S'$ , та віссю  $Oy$ .  $\gamma$  – кут між візирним променем  $BE$ , спрямованим у точку  $S$ , та його проекцією  $BE_1$  на горизонтальну площину  $\Pi_1$ .  $\gamma'$  – кут між візирним променем  $BE'$ , спрямованим у точку  $S'$ , та його проекцією  $BE'_1$  на горизонтальну площину  $\Pi_1$ .  $\beta$  – кут між проекцією  $BE_1$  візирного променя  $BE$  на горизонтальну площину  $\Pi_1$  та віссю  $Ox$ .  $AB$  – відстань між точками  $A$  та  $B$ , що належать горизонтальній площині  $\Pi_1$ .

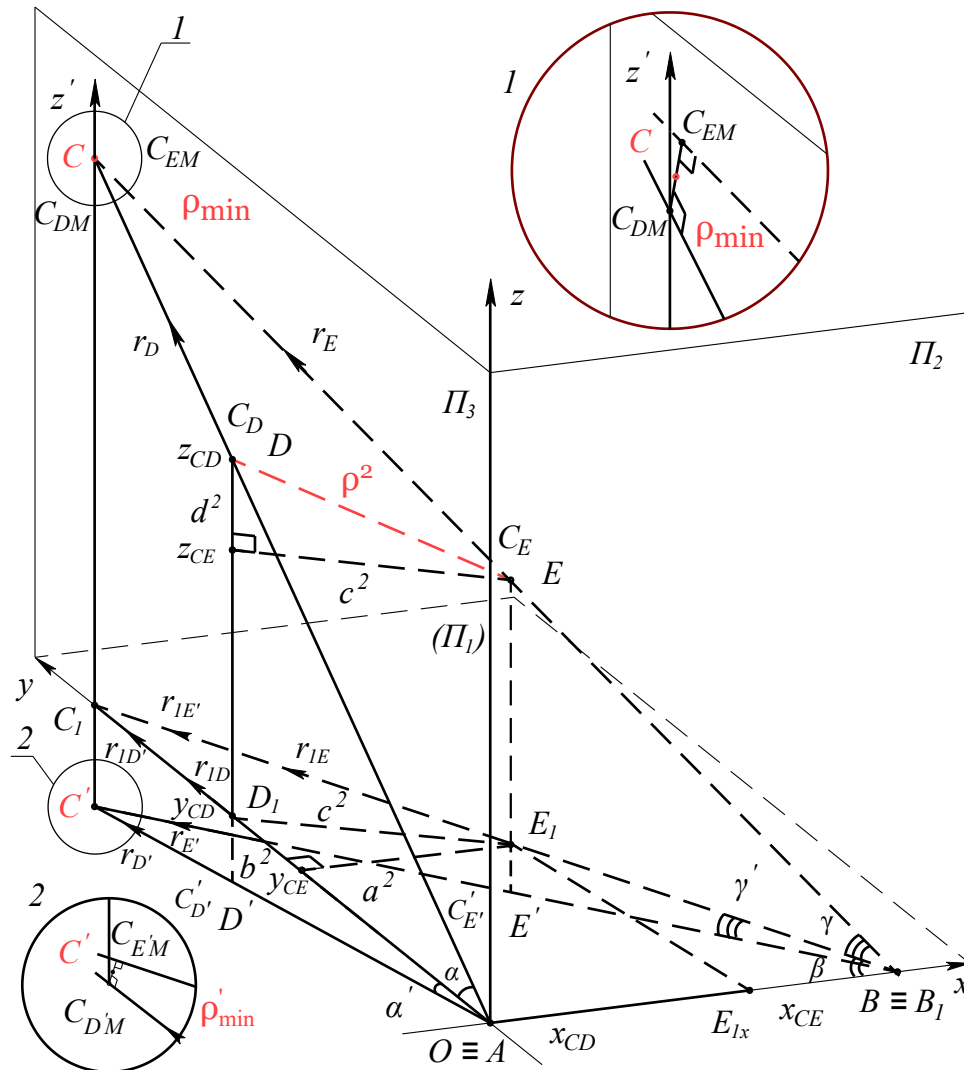


Рис. 1. Схема комбінованої геометричної моделі вимірювань з позначеннями точок А, В, D, E, D', E', кутів  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma'$  та відстані АВ).

Вимірювальні прилади (тахеометр, теодоліт, нівелір) подають значення кутів у градусах, хвилинах та секундах. Для практичних розрахунків необхідно перевести їх у десяткові дробки. Десяткове дробове число в градусах (*дград*) визначається як сума цілої частини градусів (*град*) та суми дробової хвилиної ( $x'$ ) і секундної ( $x''$ ) часток:

$$x = x' + x'' \quad (1)$$

$$x' = x\text{в}/60 \quad (2)$$

$$x'' = \text{сек}/60 \quad (3)$$

$$\text{дград} = \text{град} + x \quad (4)$$

Розроблене математико-алгоритмічне забезпечення структурно складається з п'яти блоків.

Призначення блоків алгоритму:

1. Блок 1. Визначення координат вихідних шести

точок  $A, B, D, E, D', E'$  комбінованої геометричної моделі за шістьма параметрами  $\alpha, \alpha', AB, \beta, \gamma, \gamma'$  прямих вимірювань.

2. Блок 2. Визначення області з координатами  $x_c, y_c, z_c$  недоступної точки  $C(x_c, y_c, z_c)$  за координатами вихідних точок  $A, B, D, E$ .
3. Блок 3. Визначення області з координатами  $x_{c'}, y_{c'}, z_{c'}$  недоступної точки  $C'(x_{c'}, y_{c'}, z_{c'})$  за координатами вихідних точок  $A, B, D', E'$ .
4. Блок 4. Визначення числових значень координат точок  $C, C'$  та розрахунок цільового параметра (наприклад, відстані  $|CC'|$ ).
5. Блок 5. Визначення абсолютних та відносних похибок розрахунків.

*Математико-алгоритмічне забезпечення*

Розроблене математико-алгоритмічне забезпечення складається з семи блоків (адаптивний алгоритм), які послідовно реалізують обчислення.

*Блок 1. Визначення координат початкових точок.*  
За шістьма вимірними параметрами  $(\alpha, \alpha', AB, \beta, \gamma, \gamma')$  розраховуються координати точок  $A, B, D, E, D', E'$ . Розрахунки виконуються за формулами, що базуються на геометричних співвідношеннях (детально наведено в [10, 11]). Наприклад:

1. Розраховується координата  $z_D$  точки  $D$ :

$$z_D = |A_1 D_1| \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (5)$$

2. Розраховується координата  $y_E$  точки  $E$ :

$$y_E = |B_1 E_1| \cdot \sin \beta. \quad (6)$$

3. Розраховується координата  $z_E$  точки  $E$ :

$$z_E = |B_1 E_1| \cdot \operatorname{tg} \gamma. \quad (7)$$

4. Розраховується довжина  $|A_1 E_{1x}|$  відрізка  $A_1 E_{1x}$ :

$$|E_{1x} B_1| = |B_1 E_1| \cdot \cos \beta. \quad (8)$$

5. Значення координат  $x_E$  точки  $E$  численно дорівнює довжині  $|A_1 E_{1x}|$  відрізка  $A_1 E_{1x}$ . Довжину відрізка  $A_1 E_{1x}$  можна визначити, як різницю довжин  $|A_1 B_1|$ , і  $|E_{1x} B_1|$ , відрізків  $A_1 B_1$  і  $E_{1x} B_1$ :  $|A_1 E_{1x}| = x_E$ ,  $|A_1 E_{1x}| = |A_1 B_1| - |E_{1x} B_1|$ .

$$x_E = |A_1 B_1| - |E_{1x} B_1|. \quad (9)$$

Аналогічно з використанням  $\alpha'$  та  $\gamma'$  обчислюються координати точок  $D'$  та  $E'$ .

Таким чином, після виконання першого блоку визначено значення координат всіх шести вихідних даних  $A(x_A, y_A, z_A)$ ,  $B(x_B, y_B, z_B)$ ,  $D(x_D, y_D, z_D)$ ,  $E(x_E, y_E, z_E)$ ,  $D'(x_{D'}, y_{D'}, z_{D'})$ ,  $E'(x_{E'}, y_{E'}, z_{E'})$ .

По цим вихідним координатах, відповідно до розробленої оптимізаційної моделі, у другому блоці алгоритму розраховується величина області з координатами  $x_c, y_c, z_c$  точки  $C(x_c, y_c, z_c)$  і в третьому блоці визначається область з координатами  $x_{c'}, y_{c'}, z_{c'}$  точки  $C'(x_{c'}, y_{c'}, z_{c'})$ .

*Блок 2. Визначення області для точки  $C$  (верх).*

6. Розраховуються координати  $r_{Dx}$ ,  $r_{Dy}$ ,  $r_{Dz}$  направляючого вектору  $r_D$  по формулам:

$$r_{Dx} = x_D - x_A, r_{Dy} = y_D - y_A, r_{Dz} = z_D - z_A, \quad (10)$$

де  $x_D, y_D, z_D$  – координати точки  $D$ , що належать візирному променю  $AC$ :  $x_A, y_A, z_A$  – координати точки  $A$ .

7. Розраховуються координати  $r_{Ex}, r_{Ey}, r_{Ez}$  направляючого вектору  $r_E$  по формулам:

$$r_{Ex} = x_E - x_B, r_{Ey} = y_E - y_B, r_{Ez} = z_E - z_B, \quad (11)$$

де  $x_E, y_E, z_E$  – координати точки  $E$ , належать візирному променю  $BC$ :  $x_B, y_B, z_B$  – координати точки  $B$ .

8. Розраховується коефіцієнт  $a_{11}$ :

$$a_{11} = r_{Dx}^2 + r_{Dy}^2 + r_{Dz}^2 \quad (12)$$

9. Розраховується коефіцієнт  $a_{22}$ :

$$a_{22} = r_{Ex}^2 + r_{Ey}^2 + r_{Ez}^2. \quad (13)$$

10. Розраховуються коефіцієнти:

$$a_{12} = a_{21} = (r_{Ex} \cdot r_{Dx} + r_{Ey} \cdot r_{Dy} + r_{Ez} \cdot r_{Dz}). \quad (14)$$

11. Розраховується значення вільного члена  $C_1$ :

$$C_1 = -[(x_D - x_E) \cdot r_{Dx} + (y_D - y_E) \cdot r_{Dy} + (z_D - z_E) \cdot r_{Dz}]. \quad (15)$$

12. Розраховується вільний член  $C_2$ :

$$C_2 = [(x_D - x_E) \cdot r_{Ex} + (y_D - y_E) \cdot r_{Ey} + (z_D - z_E) \cdot r_{Ez}]. \quad (16)$$

13. Розраховується визначник  $\Delta$ :

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \quad (17)$$

14. Розраховується визначник  $\Delta_1$ :

$$\Delta_1 = C_1 \cdot a_{22} - a_{12} \cdot C_2. \quad (18)$$

15. Розраховується визначник  $\Delta_2$ :

$$\Delta_2 = C_2 \cdot a_{11} - a_{21} \cdot C_1. \quad (19)$$

16. Розраховується параметр:

$$t_{CD} = \Delta_1 / \Delta. \quad (20)$$

17. Розраховується параметр:

$$t_{CE} = \Delta_2 / \Delta. \quad (21)$$

18. Розраховуються координати  $x_{EM}, y_{EM}, z_{EM}$  для точки  $C_{EM}$  променя  $BC$ :

$$x_{DM} = r_{Dx} \cdot t_{CD} + x_D; y_{DM} = r_{Dy} \cdot t_{CD} + y_D; z_{DM} = r_{Dz} \cdot t_{CD} + z_D. \quad (22)$$

19. Розраховуються координати  $x_{DM}, y_{DM}, z_{DM}$  для точки  $C_{DM}$  променя  $AC$ :

$$x_{EM} = r_{Ex} \cdot t_{CE} + x_E; y_{EM} = r_{Ey} \cdot t_{CE} + y_E; z_{EM} = r_{Ez} \cdot t_{CE} + z_E. \quad (23)$$

Таким чином, визначені координати граничних точок відрізка  $[C_{DM}, C_{EM}]$  з мінімальною величиною між *мимобіжними візирними променями*  $AC$  і  $BC$ .

*Блок 3.* Третій блок алгоритму аналогічний другому блоку.

*Блок 4.* У четвертому блоці визначаються чисельні значення

координат точок  $C$  і  $C'$ , розташованих, наприклад, у серединах мінімальних перпендикулярів між мимобіжними променями  $AC$  і  $BC$ , а також променями  $AC'$  і  $BC'$ .

20. Наприклад, координати  $x_C, y_C, z_C$  недоступної точки  $C$  можна розрахувати за формулами

$$x_C = (x_{DM} + x_{EM})/2, \quad (24)$$

$$y_C = (y_{DM} + y_{EM})/2, \quad (25)$$

$$z_C = (z_{DM} + z_{EM})/2. \quad (26)$$

21. Координати  $x_{C'}, y_{C'}, z_{C'}$  недоступної точки  $C$  можна розрахувати по формулам

$$x_{C'} = (x_{D'M} + x_{E'M})/2, \quad (27)$$

$$y_{C'} = (y_{D'M} + y_{E'M})/2, \quad (28)$$

$$z_{C'} = (z_{D'M} + z_{E'M})/2. \quad (29)$$

Якщо точка  $C'$  розташована нижче горизонтальної площини  $\Pi_1$ , то координата  $z_{C'}$  повинна мати від'ємне значення.

Якщо конструкція суворо вертикальна і точки  $C, C'$  розташовані на одному перпендикулярі до горизонтальної площини  $\Pi_1$ , то координати  $y_C$  і  $y_{C'}$  повинні бути рівні.

Таким чином, при визначенні координат недоступних точок в мінімальних областях необхідно враховувати особливості досліджуваного об'єкта.

Зокрема, визначається відстань між точками  $C, C'$ .

Блок 5. В п'ятому блоці розробленого алгоритму розраховуються абсолютні та відносні похибки.

22. Абсолютні похибки  $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$  визначених координат точки  $C(x_C, y_C, z_C)$ :

$$\Delta_x = |x_{DM} - x_{EM}|, \quad (30)$$

$$\Delta_y = |y_{DM} - y_{EM}|, \quad (31)$$

$$\Delta_z = |z_{DM} - z_{EM}|. \quad (32)$$

23. Відносні похибки для  $C$ :

$$\sum_x = \frac{\Delta_x}{x_C} \cdot 100, \quad (33)$$

$$\sum_y = \frac{\Delta_y}{y_C} \cdot 100, \quad (34)$$

$$\sum_z = \frac{\Delta_z}{z_C} \cdot 100. \quad (35)$$

24. Абсолютні похибки для  $\Delta'_x, \Delta'_y, \Delta'_z$  та відносні похибки для  $C'$  розраховуються аналогічно.

Блок 6. Адаптивна зміна кутових параметрів. Якщо отримана відносна похибка перевищує задане значення, виконується корекція кутових параметрів  $\gamma, \gamma'$  (в межах реальних похибок вимірювань) і повторюються блоки 1–5. Це забезпечує досягнення необхідної точності.

*Блок 7. Реєстрація результатів. Виведення остаточних координат, похибок та інших параметрів.*

*Обговорення результатів*

*Розроблене математичне забезпечення має такі переваги:*

- універсальність – працює з будь-яким оптичним обладнанням (теодоліти, тахеометри) без потреби в дорогих лазерних сканерах;
- однозначність – забезпечує єдиний розв'язок на відміну від класичної моделі (18 варіантів);
- стійкість – малі похибки вимірювань не призводять до катастрофічних змін результату;
- адаптивність – можливість керування похибкою шляхом зміни кутових параметрів;
- економічність – використовує доступне обладнання, не потребує складної постобробки.

*Комбінована модель дозволяє визначати координати точок, розташованих по різні боки від нульової горизонтальної площини, що розширює сферу застосування порівняно з базовою моделлю. Розроблене алгоритмічне забезпечення структурно складається з семи блоків, зміст кожного з яких відповідає етапам обчислень і може бути легко реалізований у вигляді програмного коду.*

*Особливо важливо, що запропоноване математичне забезпечення є теоретичним підґрунтям для впровадження ВІМ-технологій та параметричного нормування в Україні [9]. ВІМ-модель потребує автоматизованого наповнення параметрами елементів споруди, і запропонований апарат дозволяє отримувати ці параметри за непрямыми даними з гарантованою однозначністю та адаптивним керуванням похибкою.*

**Висновки.** В роботі було зроблено наступне:

1. Розроблено *комбіновану* тривимірну *геометричну модель* з *мимобіжними візирними променями*, яка враховує найбільш загальне розташування досліджуваного компонента об'єкта відносно геодезичного обладнання (вище, нижче або на рівні нульової горизонтальної площини).

2. Розроблено структуру *математико-алгоритмічного забезпечення* обробки експериментальних даних, що складається з семи блоків, які реалізують *адаптивний алгоритм* керування похибкою.

3. Визначено зміст кожного структурного блоку розробленого забезпечення, що включає: визначення координат початкових точок; розрахунок областей для *недоступних точок*; обчислення координат та цільових параметрів; оцінку похибок; адаптивну корекцію кутових параметрів; реєстрацію результатів.

4. Запропоноване *математичне забезпечення* є теоретичним підґрунтям для автоматизації геодезичних вимірювань, інтеграції в CAD/ВІМ-системи та впровадження параметричного нормування в будівництві.

Перспективи подальших досліджень полягають у програмній реалізації розробленого алгоритму, його адаптації для роботи з даними безпілотних літальних апаратів та підготовці пропозицій щодо внесення змін до ДБН.

### *Література*

1. Михайленко В. Є., Найдиш В. М., Подкоритов А. М., Скидан І. А. Інженерна та комп'ютерна графіка. Київ : Вища школа, 2001. 350 с.
2. Браїлов О. Ю. Інженерна геометрія. Київ : Каравелла, 2013. 456 с.
3. Ванін В. В., Блюк А. В., Гнітецька Г. О. Оформлення конструкторської документації. Київ : Каравела, 2012. 200 с.
4. Войтенко С. П., Юрковський Р. Г., Вільданова Н. Р., Малина І. А. Основи інженерної геодезії. Одеса : ОДАБА, 2014. 217 с.
5. Кузнецов А. О. Сучасні системи мобільного лазерного сканування та особливості їх застосування на автомобільних дорогах. *Дороги і мости*. 2019. № 42. С. 56–76.
6. Шульц Р. В. Наземне лазерне сканування в задачах інженерної геодезії : дис. ... д-ра техн. наук : 05.24.01. Київ, 2012. 372 с.
7. Дубовой В. М., Кветний Р. Н., Михальов О. І., Усов А. В. Моделювання та оптимізація систем. Вінниця : ПП «ТД "Едельвейс"», 2017. 804 с.
8. Григорків В. С., Григорків М. В. Вища математика. Чернівці : Чернівецький національний університет, 2011. 280 с.
9. Барзилович Д., Лагунова І., Бардасова І. та ін. Зелена книга. Системний перегляд ефективності державного регулювання. Параметричне нормування у будівництві. Київ, 2020. 92 с.
10. Браїлов О. Ю., Панченко В. І. Аналітичне обґрунтування геометричної моделі вимірювань параметрів недоступної точки об'єкта. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2019. Вип. 2(69), ч. 3. С. 237–243.
11. Brailov A. Yu., Panchenko V. I. Determination of Parameters of an Inaccessible Point of an Object. Proceedings of the Nineteenth International Conference on Geometry and Graphics (ICGG-2020, São Paulo, Brazil). Cham : Springer, 2021. P. 911–915. DOI: 10.1007/978-3-030-63403-2\_83.

## **MATHEMATICAL SOFTWARE FOR PROCESSING EXPERIMENTAL DATA IN DETERMINING THE PARAMETERS OF AN INACCESSIBLE POINT OF A CONSTRUCTION OBJECT**

Vitaliy Panchenko

*The article addresses the problem of determining the parameters of inaccessible points of construction objects based on the processing of experimental geodetic data. The relevance of the research is driven by the need for automated acquisition of geometric parameters of buildings and structures*

during reconstruction, restoration, and the creation of building information models in the context of BIM implementation and the transition to parametric standardization. This task is particularly important in the survey of cultural heritage sites and emergency structures, where direct access to certain structural elements is impossible or unsafe.

The shortcomings of classical geometric models based on intersecting sighting rays are analyzed. It is shown that, under real measurement conditions, errors cause such rays to become skew lines, resulting in ambiguity of solutions and the appearance of multiple possible coordinate values for the target point. To overcome this contradiction, a combined three-dimensional geometric model is proposed. The model considers the most general location of the surveyed object relative to geodetic equipment and enables the determination of parameters of points situated above, below, or at the level of the reference horizontal plane.

Mathematical support for processing experimental data has been developed. The proposed approach is based on optimization procedures for determining the coordinates of inaccessible points. The problem is reduced to finding the minimum distance between skew lines corresponding to sighting rays, followed by solving the resulting system of equations using Cramer's method. A mathematical and algorithmic framework consisting of seven interconnected blocks is proposed, including the determination of initial point coordinates, localization of inaccessible points, calculation of coordinates and target parameters, estimation of absolute and relative errors, adaptive correction of measurement parameters, and registration of results. A distinctive feature of the developed algorithm is its ability to adaptively control errors by refining angular parameters within permissible measurement tolerances.

An example of applying the developed mathematical support to determine the coordinates of two inaccessible points located on the same perpendicular to the horizontal plane is presented. The obtained results confirm the universality, stability, and uniqueness of the proposed approach compared with traditional methods. The practical significance of the research lies in providing a theoretical basis for the automation of geodetic measurements, integration of results into CAD/BIM systems, and support for modern processes of digital transformation in the construction industry.

*Keywords:* construction object; inaccessible point; combined geometric model; skew sighting rays; mathematical software; optimization approach; adaptive algorithm; BIM.

### **References**

1. Mykhailenko, V. Ye., Naidysh, V. M., Podkorytov, A. M., & Skydan, I. A. (2001). *Inzhenerna ta kompiuterna hrafiika*. Kyiv: Vyshcha shkola, 350 p. [In Ukrainian].
2. Brailov, O. Yu. (2013). *Inzhenerna heometriia*. Kyiv: Karavella, 456 p. [In Ukrainian].

3. Vanin, V. V., Bliok, A. V., & Hnitetska, H. O. (2012). Oformlennia konstruktorskoï dokumentatsii. Kyiv: Karavela, 200 p. [In Ukrainian].
4. Voitenko, S. P., Yurkovskyy, R. H., Vildanova, N. R., & Malyna, I. A. (2014). Osnovy inzhenernoi heodezii. Odesa: ODABA, 217 p. [In Ukrainian].
5. Kuznetsov, A. O. (2019). Modern mobile laser scanning systems and features of their application on highways. *Dorohy i mosty*, 42, 56–76. [In Ukrainian].
6. Shults, R. V. (2012). Terrestrial laser scanning in engineering geodesy problems. Doctor's thesis. Kyiv, 372 p. [In Ukrainian].
7. Dubovoi, V. M., Kvietyi, R. N., Mykhalov, O. I., & Usov, A. V. (2017). Modeliuvannia ta optymizatsiia system. Vinnytsia: PP «TD “Edelveis”», 804 p. [In Ukrainian].
8. Hryhorkiv, V. S., & Hryhorkiv, M. V. (2011). *Vyshcha matematyka*. Chernivtsi: Chernivetskyi natsionalnyi universytet, 280 p. [In Ukrainian].
9. Barzylowych, D., Lahunova, I., Bardasova, I., et al. (2020). Zelena knyha. Systemnyi perehliad efektyvnosti derzhavnogo rehuliuвання. Parametrychne normuvannia u budivnytstvi. Kyiv, 92 p. [In Ukrainian].
10. Brailov, O. Yu., & Panchenko, V. I. (2019). Analytical substantiation of a geometric model for measuring the parameters of an inaccessible point of an object. *Visnyk Khersonskoho natsionalnogo tekhnichnogo universytetu*, 2(69), Part 3, 237–243. [In Ukrainian].
11. Brailov, A. Yu., & Panchenko, V. I. (2021). Determination of parameters of an inaccessible point of an object. In *Proceedings of the Nineteenth International Conference on Geometry and Graphics (ICGG-2020, São Paulo, Brazil)* (pp. 911–915). *Advances in Intelligent Systems and Computing*, Vol. 1296. Cham: Springer. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-63403-2\\_83](https://doi.org/10.1007/978-3-030-63403-2_83) [In English].

*Матеріал надійшов до редакції 29.04.2026*

*Прийнято до друку 13.05.2026 р.*