

УДК 514.18

СУМАРНА ЗА ДЕНЬ ОСВІТЛЕНІСТЬ НАХИЛЕНИХ ПІД ТУПИМ КУТОМ ДО ПЛОЩИНИ ГОРИЗОНТУ ПЛОЩИН ВІД РІЗНИХ ТИПІВ НЕБОЗВОДІВ

DOI: 10.33842/2313-125X-2026-29-258-268

Пугачов Є.В., д-р. техн. наук,

pev1957@ukr.net, ORCID: 0000-0003-4771-0942

Літніцький С.І., канд. техн. наук,

gavran88@ukr.net, ORCID: 0000-0003-4962-7800

Кундрат Т.М., канд. техн. наук,

kundratt@i.ua, ORCID: 0000-0001-9345-3161

Зданевич В.А.,

vasyl.zdanevych@gmail.com, ORCID: 0000-0002-9875-8463*Національний університет водного господарства та природокористування (м. Рівне, Україна)*

В статті показані графіки сумарної за день освітленості нахилених під тупим кутом до площини горизонту площин від різних типів небозводів, наведених в ДСТУ ISO 15469:2008. «Розподіл яскравості денного світла просторовий. Стандартне хмарне та безхмарне небо згідно з CIE (ISO 15469:2004, IDT)», створеного на основі закордонного аналогу CIE S 011/E:2003 (ISO 15469:2004(E). «Spatial distribution of daylight – CIE standard general sky». В стандартах розглядаються 15-ть математичних моделей типів небозводів, які є вихідною інформацією для моделювання природної освітленості та інших характеристик світлового поля.

Для розрахунку експозиції нахиленої під тупим кутом до площини горизонту площини були обрані 79-й день року (20 березня), 172-й день року (21 червня) та 355-й день року (21 грудня). Обчислення проводилися для широти міста Рівне (50,623° пн. ш.).

Орієнтація площин відносно сторін світу задавалася з кроком 10 градусів. Кут нахилу площин для кожного розташування відносно сторін світу задавався в межах від 90° до 170° також з кроком 10 градусів. Для кожної площини тривалість сонячного дня від сходу до заходу Сонця для кожного з обраних днів року була поділена на 30 рівних інтервалів і, відповідно, 31 момент сонячного часу, на межах яких обчислювалась освітленість для всіх 15-ти математичних моделей небозводу. Таким чином були отримані дискретно представлені криві залежності освітленості нахиленої під тупим кутом до площини горизонту площини від сонячного часу. Далі дискретні значення освітленості інтерполювалися кубічними сплайнами з метою інтегрування по сонячному часу, що дозволило отримати сумарну за день освітленість (експозицію).

У статті продемонстровані результати лише для трьох характерних типів небозводів: 5-го, 8-го і 15-го.

Інформація щодо сумарної за день освітленості нахиленої під тупим кутом площини для даного типу небозводу, характерного для певної місцевості, дозволяє оцінювати ресурси природної освітленості, визначити критичну зовнішню освітленість, раціонально використовувати штучне освітлення, заощаджуючи на ньому.

Ключові слова: експозиція, критична зовнішня освітленість, природна освітленість, освітленість площини, сонячний час, тип небозводу.

Постановка проблеми. До 2004 року для розрахунку яскравості неба і природної освітленості та інших характеристик світлового поля використовували документ CIE S 003/E:1996 [1], який описував розподіл яскравості за небозводом із суцільною хмарністю формулою Муна-Спенсер, запропонованою американськими вченими Муном і Спенсер ще у 1942 році.

Пізніше Міжнародною комісією з освітленості був стандартизований новий документ: CIE S 011/E:2003 [2]. Аналогічний документ, а саме – ДСТУ ISO 15469:2008 [3] був запроваджений в Україні. В обох стандартах наведено вже 15-ть математичних моделей типів небозводів, а небозвід із суцільною хмарністю є лише одним із них (першим). Згадані документи є ще відносно новими, і тому потребують як додаткового аналізу, так і коректного застосування (адаптації), зокрема, для умов України.

Одним з чинників, які характеризують ресурси природної освітленості, є експозиція нахилених під різними кутами площин, створена різними типами небозводів в характерні дні року на даній широті. Зокрема, це можуть бути нахилені під тупим кутом площини. Потреба у такій інформації може виникати у випадку виступаючих частин будівель: навісів над входом, частин зовнішніх стін тощо.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Різні питання дослідження типів небозводів розглядалися як для різних регіонів світу [4-8], так і для України [9-11]. Крім того, в роботі [12] була визначена освітленість горизонтальних площин від різних типів небозводів для міст Хмельницький і Одеса. Проте в цих роботах експозиція нахилених під тупими кутами до площини горизонту площин від різних типів небозводів не розглядалася.

Формулювання цілей статті. В роботі поставлено мету – для характерних днів року розрахувати та візуалізувати криві сумарної за день освітленості (експозиції) нахилених під тупими кутами площин, зорієнтованих під різними кутами відносно сторін світу, від різних типів небозводів для міста Рівне.

Основна частина. В загальному вигляді освітленість площини визначається за формулою:

$$E = \int_{\Omega} dE_H \cdot \cos\beta, \quad (1)$$

де Ω – тілесний кут, який обмежує світловий потік, падаючий на площину; dE_H – освітленість площини, перпендикулярної осі елементарного тілесного кута $d\Omega$, створена елементарним випромінювачем, в межах цього тілесного кута; $\cos\beta_x$, $\cos\beta_y$, $\cos\beta_z$ – функції цінності випромінювання для освітленості координатних площин (β_x , β_y , β_z – кути падіння світла на координатні площини yOz , xOz , xOy).

Освітленість нахиленої під тупим кутом площини можна обчислити як модуль скалярного добутку одиничної нормалі \vec{n} до нахиленої площини та світлового вектора, створеного областю інтегрування S (рис.1). Зважаючи на те, що $d\Omega = \frac{\cos\theta}{l^2} dS$, формули для обчислення координат світлового вектора, створеного областю інтегрування, можна записати у вигляді:

$$\varepsilon_x = \int_S t_x \cdot \frac{L_\theta \cdot \cos\theta}{l^2} dS, \quad (2)$$

$$\varepsilon_y = \int_S t_y \cdot \frac{L_\theta \cdot \cos\theta}{l^2} dS, \quad (3)$$

$$\varepsilon_z = \int_S t_z \cdot \frac{L_\theta \cdot \cos\theta}{l^2} dS, \quad (4)$$

де t_x , t_y , t_z – координати одиничного вектора \vec{t} , спрямованого від середини елементарної площинки dS на небозводі в розрахункову точку; l – відстань між ними; θ – кут між \vec{t} та вектором нормалі до поверхні випромінювача; S – область інтегрування; L_θ – яскравість довільного елемента небозводу, яка обчислюється за формулою:

$$L_\theta = \frac{L_Z \cdot f(\chi) \cdot \varphi(Z)}{f(Z_S) \cdot \varphi(0)}, \quad (5)$$

де φ – функція градації яскравості, яка пов'язує яскравість елемента небозводу та його зенітний кут; f – індикатриса розсіювання, що пов'язує відносну яскравість елемента небозводу з його кутовою відстанню від Сонця; L_Z – яскравість небозводу у зеніті. φ та f визначаються згідно формул, наведених в ДСТУ ISO 15469:2008, а L_Z – згідно [13, 14].

Елементарна площинка dS на поверхні сфери утворюється парами суміжних паралелей і меридіанів (рис. 1). Проте лінія перетину нахиленої під кутом площини і небозводу не збігається зі згаданими вище двома парами ліній, що ускладнює процес інтегрування. Тому область інтегрування (рис. 1) була наближено замінена на 180 менших областей (апроксимована), які по висоті були обмежені парами паралельних широт.

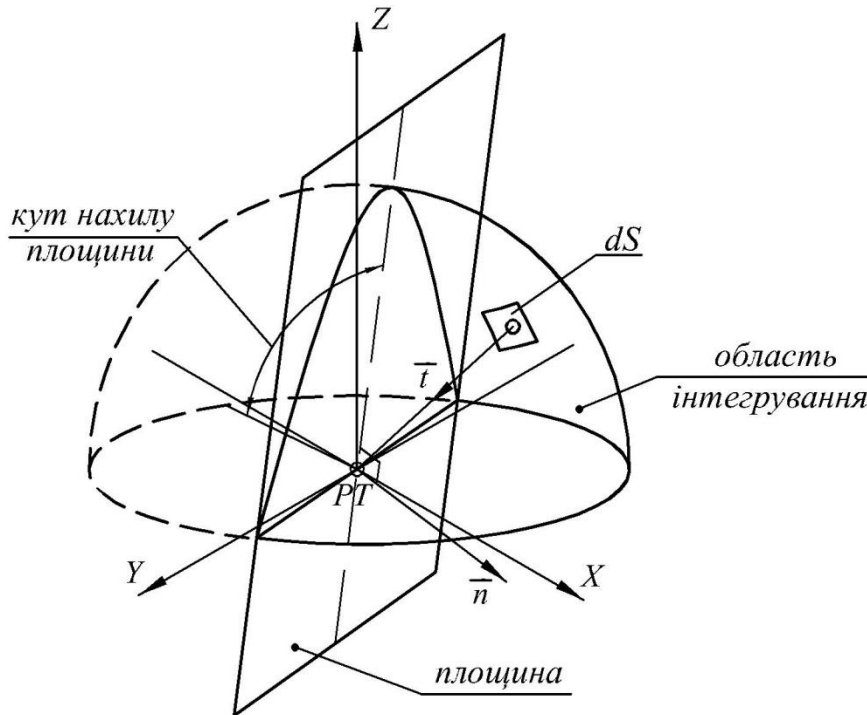


Рис. 1. До визначення області інтегрування

Для кожної ділянки вздовж відповідного меридіана визначалося значення кутової висоти на межі області інтегрування і решти небесної півсфери [15] (на лінії перетину нахиленої під кутом площини і небозводу). Після цього визначалося середнє значення двох суміжних кутових висот. Схематично апроксимуючі ділянки на півсфері зображені на рис. 2.

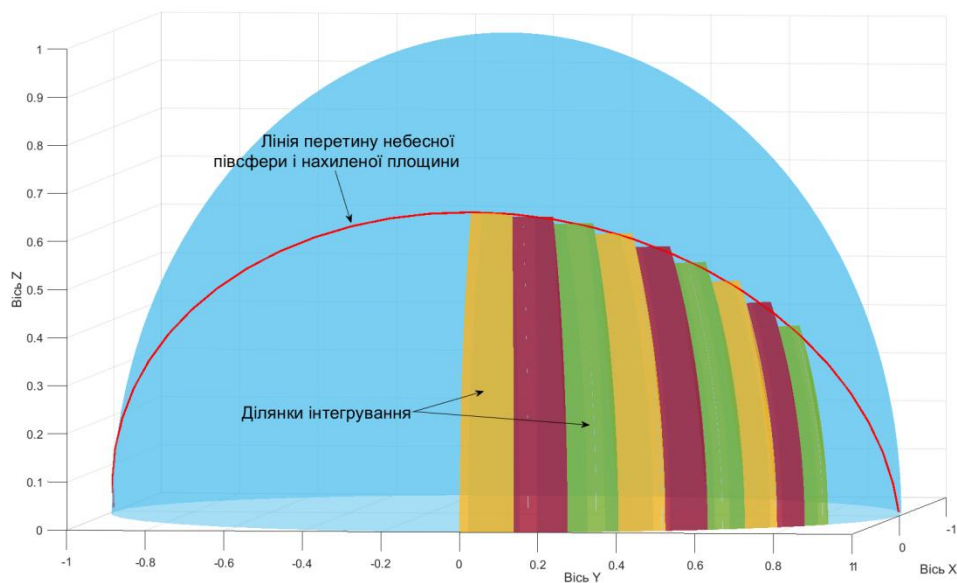


Рис. 2. До апроксимації області інтегрування

Для розрахунку експозиції нахиленої під тупим кутом площини були обрані 79-й день року (20 березня), 172-й день року (21 червня) та 355-й день року (21 грудня). Обчислення проводилися для широти міста Рівне ($50,623^\circ$ пн. ш.). Координати Сонця обчислювалися за відомими формулами. Сонячний час відраховувався від сонячного полудня в бік сходу зі знаком «-», в бік заходу зі знаком «+». Спираючись на координати Сонця на певний момент сонячного часу, обчислювалася кутова відстань між елементом небозводу та Сонцем.

Орієнтація площин відносно сторін світу задавалася з кроком 10 градусів. Кут нахилу площин для кожної орієнтації задавався в межах від 90° до 170° також з кроком 10 градусів. Для кожної площини тривалість сонячного дня від сходу до заходу Сонця для кожного з обраних днів року була поділена на 30 рівних інтервалів і, відповідно, 31 момент сонячного часу, на межах яких обчислювалася освітленість для всіх 15-ти математичних моделей небозводу. Таким чином були отримані дискретно представлені криві залежності освітленості нахиленої під тупим кутом площини від сонячного часу. Далі дискретні значення освітленості інтерполювалися кубічними сплайнами з метою інтегрування по сонячному часу, що дозволило отримати сумарну за день освітленість (експозицію). Обчислення проводилися в системі комп'ютерної математики MatLab. Освітленість обчислювалася у кілолюксах.

У статті продемонстровані результати лише для трьох характерних типів небозводів: 5-го, 8-го і 15-го. Результати обчислень сумарної за день освітленості (експозиції) площин представлені на рис. 3-5 у вигляді полярних графіків. Орієнтація на північ показана стрілкою. Для кращого розрізнення криві позначені різними типами ліній.

Для 5-го типу небозводу експозиція не залежала від орієнтації площини відносно сторін світу, оскільки яскравість точки на ньому (як і 1-го та 3-го) не залежить від координат сонця на небозводі. Тому для них достатньо порахувати експозицію лише площин різного кута нахилу одної довільної орієнтації. З рис. 3 видно, що значення, отримані для вертикальної площини, приблизно в три рази більші за значення, отримані для площини нахиленої на 100° . При подальшому збільшенні кута нахилу значення експозиції різко знижувалося і для кута нахилу 170° було близьким до нуля.

Для 8-го типу небозводу експозиція сильно залежала від орієнтації площини. Зрозуміло, що значення при орієнтації площини на південь більші за значення для орієнтації площини на північ. З рис. 4 видно, що значення, отримані для вертикальної площини, в 2-3 рази більша за значення, отримані для площини нахиленої на 100° . З цього видно, що для різних сторін світу експозиція зменшується не рівномірно.

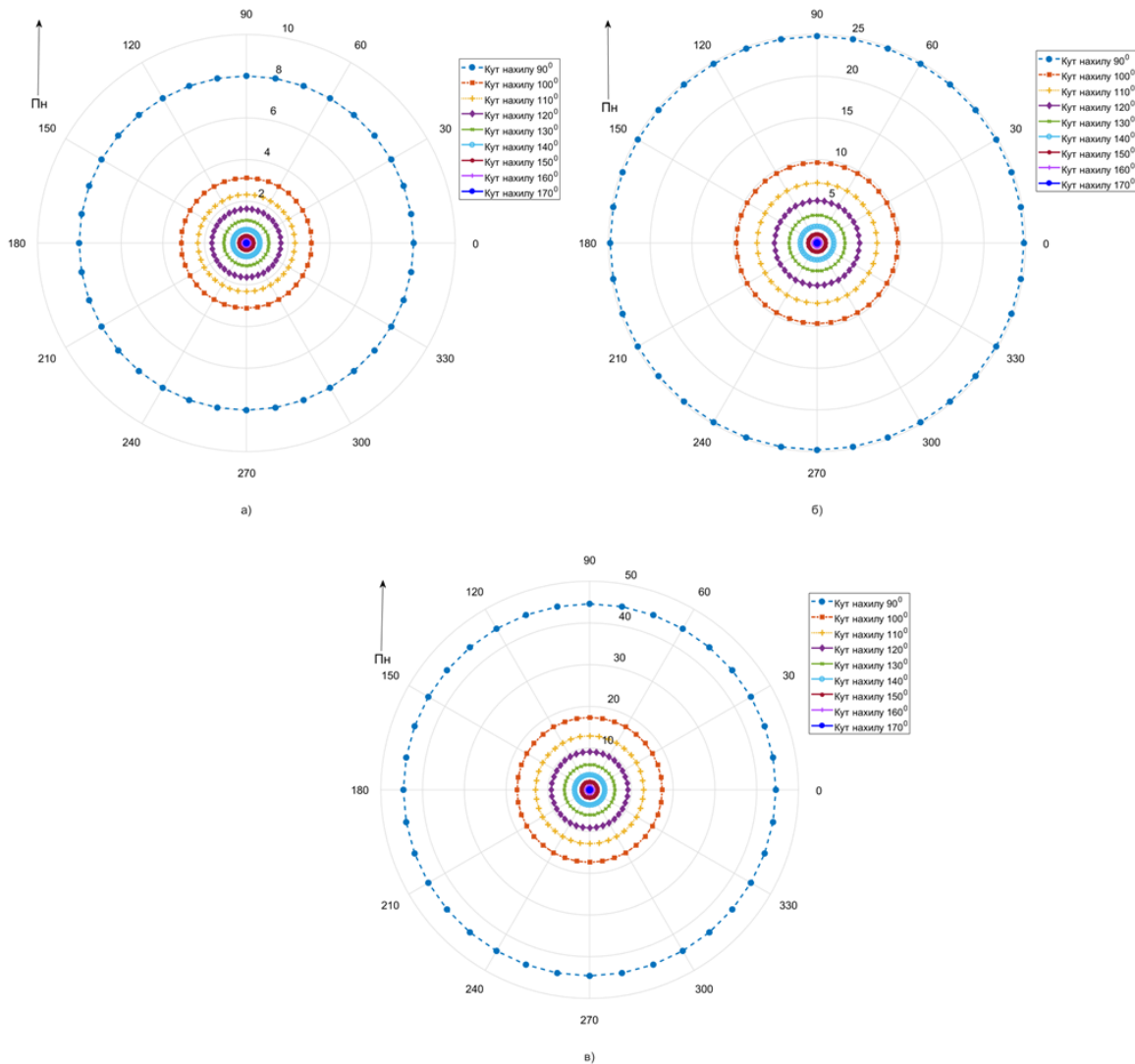


Рис. 3. Залежності сумарної за день освітленості нахиленої площини від її орієнтації відносно сторін світу для 5-го типу небозводу: а) для 355-го дня року (21-го грудня); б) для 79-го дня року (20-те березня); в) для 172-го дня року (21-го червня)

Для 15-го типу небозводу в загальних рисах результати були подібними до результатів, отриманих для 8-го типу небозводу (рис. 5).

Висновки. Інформація щодо сумарної за день освітленості нахиленої під тупим кутом до площини горизонту площини для даного типу небозводу, характерного для певної місцевості, дозволяє оцінювати ресурси природної освітленості, визначити критичну зовнішню освітленість, раціонально використовувати штучне освітлення, заощаджуючи на ньому.

Подальші дослідження можна спрямувати на моделювання освітленості площин різного нахилу та орієнтації для інших днів року та різних географічних широт.

Крім того, розроблену MatLab-програму можна використати для моделювання освітленості нахилених площин споруд та в приміщеннях будівель різного призначення від світлопрорізів різної форми.

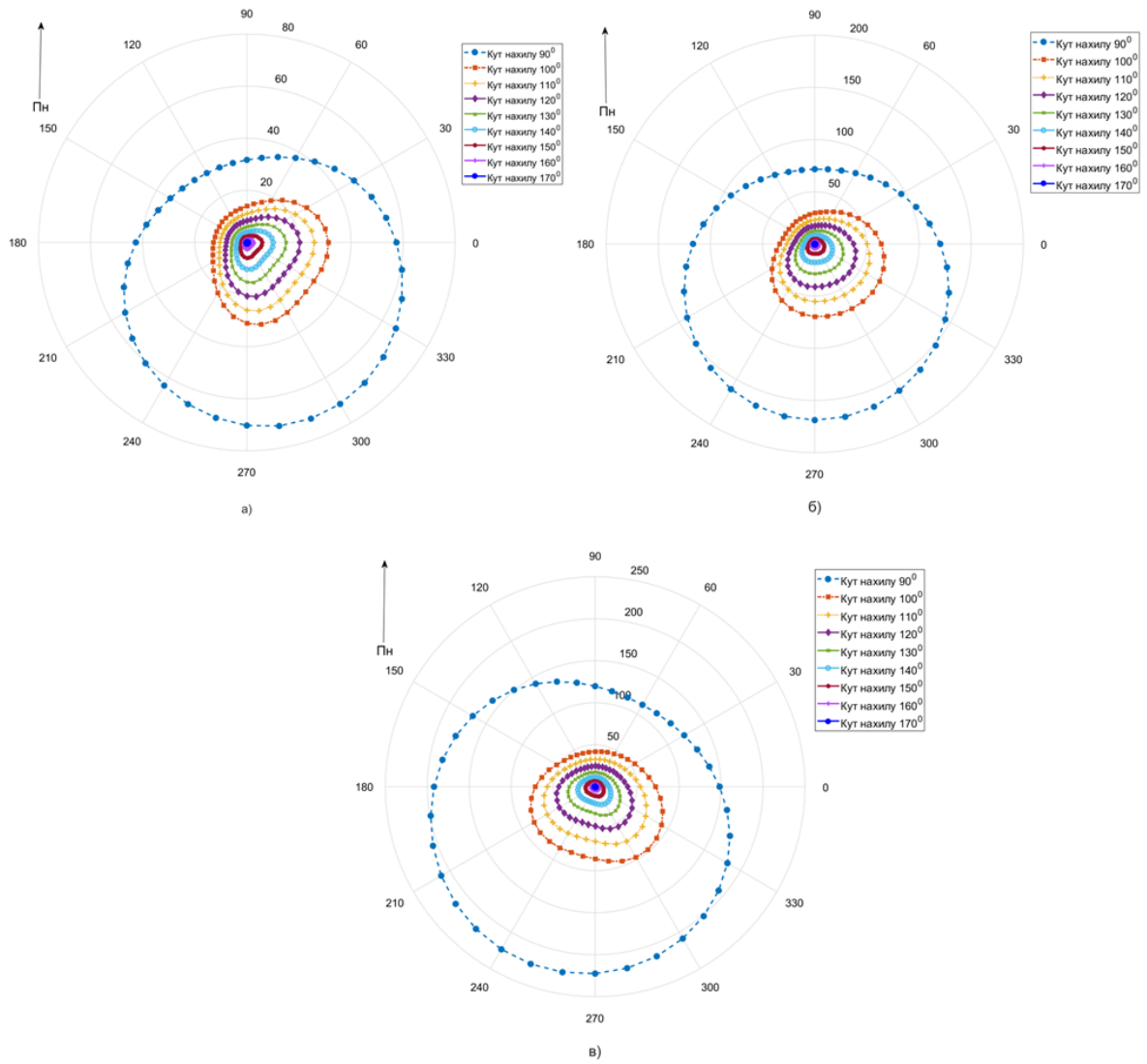


Рис. 4. Залежності сумарної за день освітленості нахиленої площини від її орієнтації відносно сторін світу для восьмого типу небозводу: а) для 355-го дня року (21-го грудня); б) для 79-го дня року (20-те березня); в) для 172-го дня року (21-го червня)

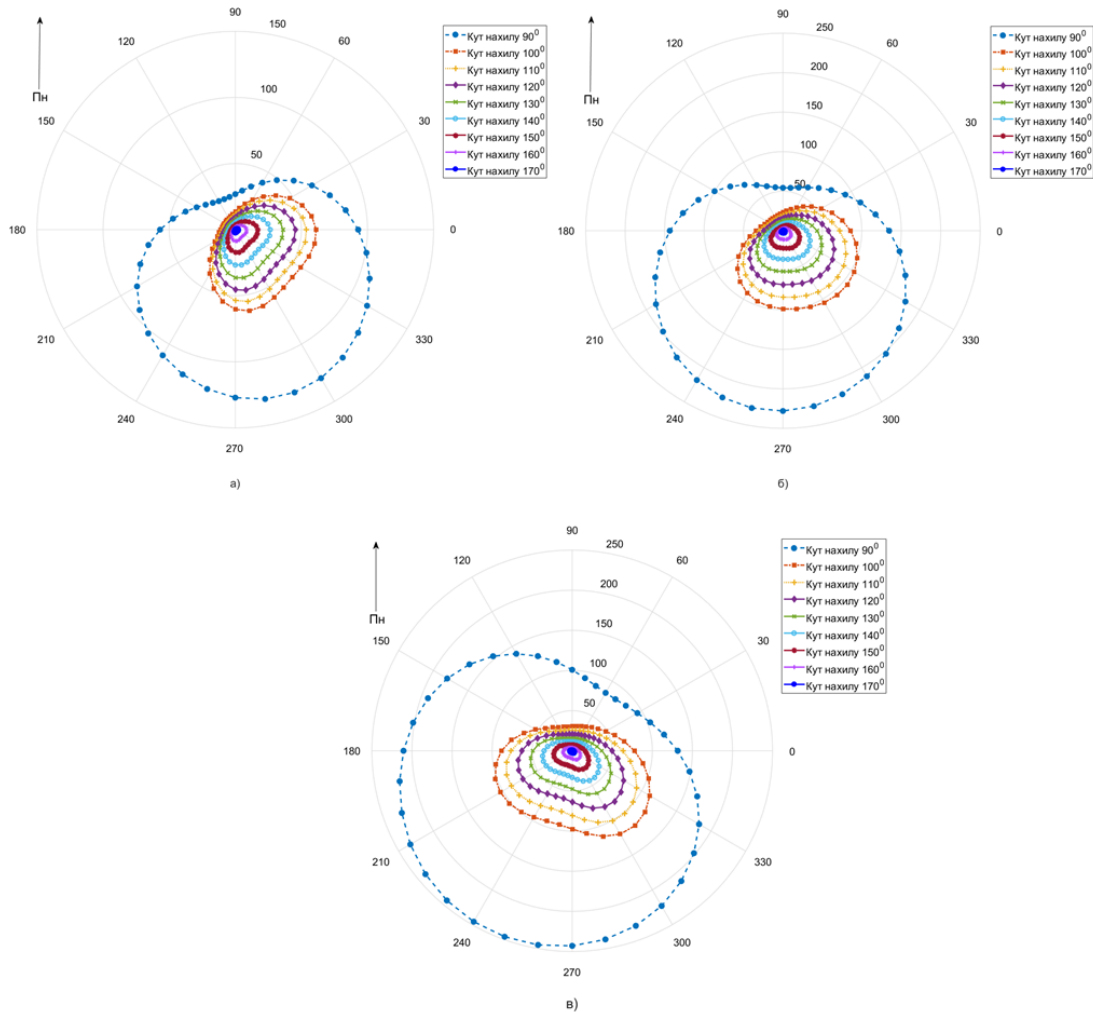


Рис. 5. Залежності сумарної за день освітленості нахиленої площини від її орієнтації відносно сторін світу для п'ятнадцятого типу небозводу: а) для 355-го дня року (21-го грудня); б) для 79-го дня року (20-те березня); в) для 172-го дня року (21-го червня)

Література

1. CIE Standard Overcast Sky and Clear Sky. CIE S 003/E:1996 (ISO 15469:1997). Vienna : Commission Internationale de l'Éclairage, 1997.
2. Spatial Distribution of Daylight – CIE Standard General Sky. CIE S 011/E:2003 (ISO 15469:2004(E)). Vienna : Commission Internationale de l'Éclairage, 2004.
3. Розподіл яскравості денного світла просторовий. Стандартне хмарне та безхмарне небо згідно з CIE (ISO 15469:2004, IDT) : ДСТУ ISO 15469:2008. Київ : Держспоживстандарт України, 2013. 7 с.
4. Wittkopf S. K. Analysing sky luminance scans and predicting frequent sky patterns in Singapore. *Lighting Research and Technology*. 2004. Vol. 36, No. 3. P. 271–281. DOI: <https://doi.org/10.1191/1365782804li128oa>.
5. Piderit M. B., Cauwerts C., Diaz M. Definition of the CIE standard skies and application of the HDRI technique to characterize the spatial distribution of

- daylight in Chile. *Journal of Construction*. 2014. Vol. 13. P. 22–30.
6. Almorox J., Hontoria C. Global solar radiation estimation using sunshine duration in Spain. *Energy Conversion and Management*. 2004. Vol. 45. P. 1529–1535. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2003.08.022>.
 7. Akpabio L., Etuk S. E. Relationship between solar radiation and sunshine duration for Onne, Nigeria. *Turkish Journal of Physics*. 2003. Vol. 27, No. 2. P. 161–167.
 8. Ng E., Cheng V., Gadi A., Mu J., Lee M. Defining standard skies for Hong Kong. *Building and Environment*. 2007. Vol. 42. P. 866–876. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2005.10.005>.
 9. Litnitskyi S., Pugachov E., Kundrat T., Zdanevych V. Determination of efficiency of the vertical specularly reflecting cylindrical light shaft for different types of firmaments. *Journal of Daylighting*. 2025. Vol. 12. P. 278–292. DOI: <https://doi.org/10.15627/jd.2025.19>.
 10. Radomtsev D., Sergeychuk O. Implementation of CIE General Sky Model approach in Ukraine and effects on room illuminance mode. *International Journal of Smart Home*. 2016. Vol. 10. P. 57–70. DOI: <https://doi.org/10.14257/ijsh.2016.10.7.06>.
 11. Radomtsev D., Sergeychuk O. Employment features of CIE S 011/E:2003 (ISO 15469:2004) “CIE Standard General Sky” under designing systems of room daylighting. *Future Technology*. 2007. Vol. 39. P. 31–51.
 12. Пугачов Є. В., Літницький С. І., Кундрат Т. М., Зданевич В. А., Літницький В. І. Освітленість горизонтальних площин від різних типів небозводів для міст Хмельницький і Одеса та її порівняння. *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Технічні науки*. 2024. Вип. 3(107). С. 277–289.
 13. Kittler R., Darula S. The research search for the least beneficial overcast sky and progress in defining its luminance gradation function. *Building Research Journal*. 2014. Vol. 61. P. 151–166.
 14. Kittler R., Perez R., Darula S. A Set of Standard Skies Characterizing Daylight Conditions for Computer and Energy Conscious Design. Final Report of the U.S.-Slovak Grant Project US-SK 92 052. Bratislava : Polygrafia, 1998. 54 p.
 15. Пугачов Є. В. Дискретне геометричне моделювання скалярних і векторних полів стосовно будівельної світлотехніки : дис. ... д-ра техн. наук : 05.01.01. Київ, 2001. 324 с.

TOTAL DAYTIME ILLUMINATION OF PLANES INCLINED AT AN OBTUSE ANGLE TO THE HORIZON PLANE FROM DIFFERENT FIRMAMENT TYPES

Evgen Pugachev, Serhii Litnitskyi, Taras Kundrat, Vasyl Zdanevych

The article shows graphs of the total daily illumination of planes inclined at an obtuse angle to the horizon plane from different types of firmaments given

in DSTU ISO 15469:2008. “Spatial distribution of daylight brightness. Standard cloudy and cloudless sky according to CIE (ISO 15469:2004, IDT)”, created on the basis of the foreign analogue CIE S 011/E:2003 (ISO 15469:2004(E). “Spatial distribution of daylight – CIE standard general sky”. The standards consider 15 mathematical models of firmaments, which are the initial information for modeling of daylight and other characteristics of the light field.

To calculate the exposure of an obtuse inclined plane to the horizon plane, the 79th day of the year (March 20), the 172nd day of the year (June 21), and the 355th day of the year (December 21) were chosen. The calculations were performed for the latitude of the city of Rivne (50.623° N).

The orientation of the planes relative to the cardinal points was set in increments of 10 degrees. The angle of inclination of the planes for each location relative to the cardinal points was set in the range from 90° to 170° also in increments of 10 degrees. For each plane, the duration of the solar day from sunrise to sunset for each of the selected days of the year was divided into 30 equal intervals and, accordingly, 31 moments of solar time, on the boundaries of which the illumination was calculated for all 15 mathematical models of the firmament. Thus, discretely presented curves of the dependence of the illumination of a plane inclined at an obtuse angle to the horizon plane on solar time were obtained. Then, the discrete values of illumination were interpolated by cubic splines for the purpose of integration over solar time, which allowed obtaining the total illumination (exposure) for the day.

The article demonstrates results for only three characteristic types of firmaments: the 5th, 8th, and 15th.

Information on illumination of planes inclined at an obtuse angle for a given type of firmament, typical for a certain area, allows you to evaluate daylight resources, determine critical external illumination and rationally use artificial lighting, saving on it.

Keywords: exposition, critical external illuminance, daylight, lightening, solar time, type of firmament.

References

1. CIE Standard Overcast Sky and Clear Sky. (1997). CIE S 003/E:1996 (ISO 15469:1997). Vienna: Commission Internationale de l'Éclairage. [In English].
2. Spatial Distribution of Daylight – CIE Standard General Sky. (2004). CIE S 011/E:2003 (ISO 15469:2004(E)). Vienna: Commission Internationale de l'Éclairage. [In English].
3. Spatial distribution of daylight luminance. CIE standard overcast and clear sky (ISO 15469:2004, IDT): DSTU ISO 15469:2008. (2013). Kyiv: Derzhspozhyvstandart Ukrainy, 7 p. [In Ukrainian].
4. Wittkopf, S. K. (2004). Analysing sky luminance scans and predicting frequent sky patterns in Singapore. *Lighting Research and Technology*, 36(3), 271–281. DOI: <https://doi.org/10.1191/1365782804li128oa> [In English].

5. Piderit, M. B., Cauwerts, C., & Diaz, M. (2014). Definition of the CIE standard skies and application of the HDRI technique to characterize the spatial distribution of daylight in Chile. *Journal of Construction*, 13, 22–30. [In English].
6. Almorox, J., & Hontoria, C. (2004). Global solar radiation estimation using sunshine duration in Spain. *Energy Conversion and Management*, 45, 1529–1535. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2003.08.022> [In English].
7. Akpabio, L., & Etuk, S. E. (2003). Relationship between solar radiation and sunshine duration for Onne, Nigeria. *Turkish Journal of Physics*, 27(2), 161–167. [In English].
8. Ng, E., Cheng, V., Gadi, A., Mu, J., & Lee, M. (2007). Defining standard skies for Hong Kong. *Building and Environment*, 42, 866–876. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2005.10.005> [In English].
9. Litnitskyi, S., Pugachov, E., Kundrat, T., & Zdanevych, V. (2025). Determination of efficiency of the vertical specularly reflecting cylindrical light shaft for different types of firmaments. *Journal of Daylighting*, 12, 278–292. DOI: <https://doi.org/10.15627/jd.2025.19> [In English].
10. Radomtsev, D., & Sergeychuk, O. (2016). Implementation of CIE General Sky Model approach in Ukraine and effects on room illuminance mode. *International Journal of Smart Home*, 10, 57–70. DOI: <https://doi.org/10.14257/ijsh.2016.10.7.06> [In English].
11. Radomtsev, D., & Sergeychuk, O. (2007). Employment features of CIE S 011/E:2003 (ISO 15469:2004) “CIE Standard General Sky” under designing systems of room daylighting. *Future Technology*, 39, 31–51. [In English].
12. Puhachov, Ye. V., Litnitskyi, S. I., Kundrat, T. M., Zdanevych, V. A., & Litnitskyi, V. I. (2024). Illuminance of horizontal planes under different sky types for the cities of Khmelnytskyi and Odesa and its comparison. *Visnyk Natsionalnoho universytetu vodnoho hospodarstva ta pryrodokorystuvannia. Tekhnichni nauky*, 3(107), 277–289. [In Ukrainian].
13. Kittler, R., & Darula, S. (2014). The research search for the least beneficial overcast sky and progress in defining its luminance gradation function. *Building Research Journal*, 61, 151–166. [In English].
14. Kittler, R., Perez, R., & Darula, S. (1998). A set of standard skies characterizing daylight conditions for computer and energy conscious design. Final report of the U.S.-Slovak Grant Project US-SK 92 052. Bratislava: Polygrafia, 54 p. [In English].
15. Puhachov, Ye. V. (2001). Discrete geometric modeling of scalar and vector fields for building lighting engineering (Doctoral dissertation, specialty 05.01.01). Kyiv, 324 p. [In Ukrainian].

Матеріал надійшов до редакції 29.04.2026

Прийнято до друку 13.05.2026 р.