

УДК 514.18

МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ БЕТОННОЇ СУМІШІ НА ПОВЕРХНЯХ МОНОЛІТНИХ КОНСТРУКЦІЙ

DOI: 10.33842/2313-125X-2026-29-294-299

Усенко В.Г., д-р. техн. наук,

valery_usenko@ukr.net, ORCID: 0000-0002-4937-6442*Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія
Кондратюка» (м. Полтава, Україна)*

У цій статті розглядається проблема рівномірного розподілу бетонної суміші під час формування монолітних конструкцій на похилих та криволінійних поверхнях. Актуальність дослідження обумовлена зростаючим використанням оболонкових, купольних та просторових конструкцій у сучасному будівництві, де бетонування виконується на поверхнях зі значним нахилом та змінною кривизною. За таких умов поведінка бетонної суміші суттєво відрізняється від тієї, що спостерігається в горизонтальних конструкціях монолітних просторових покриттів. Це призводить до потенційних дефектів, пов'язаних з нерівномірним розподілом матеріалу по поверхні споруд.

На ранніх стадіях твердіння бетонна суміш моделюється як в'язкопластичний матеріал типу Бінгама, що характеризується межею текучості та пластичною в'язкістю. На основі принципів механіки суцільного середовища аналізуються умови початку течії під дією сили тяжіння на похилі поверхні. Виведено аналітичні вирази, що описують розподіл напружень зсуву та профілів швидкості всередині бетонного шару, що дозволяє визначити критичні умови переходу від твердоподібного до текучого стану.

Особлива увага приділяється узагальненню класичної моделі течії для криволінійних оболонкових поверхонь. Для досягнення цієї мети використовується математичний апарат диференціальної геометрії, що дозволяє враховувати локальні кути нахилу, головні кривини та зміни напрямку сили тяжіння вздовж поверхні. Показано, що умови стійкості бетонного шару визначаються локальними геометричними характеристиками оболонки.

Запропонована модель забезпечує теоретичну основу для оцінки стійкості бетонних сумішей на складних поверхнях і може бути застосована для оптимізації технологій бетонування при будівництві монолітних оболонкових конструкцій. Результати сприяють покращенню якості конструкцій та зменшенню ризику дефектів, пов'язаних з нерівномірним розподілом матеріалу. Отримані результати можуть бути використані для розроблення рекомендацій щодо підбору складу

суміші, режимів укладання та контролю якості бетонування в реальних умовах будівельного майданчика.

Ключові слова: бетонна суміш, в'язкопластичні матеріали, реологія бетону, оболонкові конструкції, криволінійні поверхні, диференціальна геометрія оболонок.

Постановка проблеми. Сучасна архітектура та будівництво характеризуються активним застосуванням просторових конструкцій складної геометрії, зокрема купольних, оболонкових та аркових покриттів. Ці конструкції мають низку переваг: вони забезпечують ефективний розподіл навантажень, дозволяють зменшити витрати матеріалів та створювати великі перекриття без внутрішніх опор.

Однією з ключових проблем є забезпечення рівномірного розподілу бетонної суміші під час її укладання на поверхнях зі значним нахилом або змінною кривиною. На відміну від горизонтальних конструкцій, де бетонна суміш розподіляється майже рівномірно, на похилих поверхнях виникає складна взаємодія між гравітаційними силами, внутрішнім тертям та граничним напруженням зсуву матеріалу. Це може призводити до нерівномірної товщини бетонного шару, локальних деформацій, появи внутрішніх дефектів конструкції. Тому виникає необхідність у теоретичних моделях, які дозволяють оцінювати умови стабільності бетонної суміші на поверхнях складної геометрії.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Технологічні аспекти бетонування розглядаються у працях з технології будівельного виробництва [1-3], де описано основні методи укладання бетонної суміші та принципи організації будівельних процесів.

У сучасних дослідженнях значна увага приділяється використанню пневматичних опалубок, які дозволяють швидко формувати тонкостінні оболонкові конструкції [4]. Одним із відомих прикладів є система *Binishells*, що використовується для будівництва купольних споруд [5]. Дослідження пневматичних та біоміметичних конструкцій демонструють перспективність використання оболонкових структур у сучасній архітектурі [6].

Поведінка бетонної суміші під час укладання значною мірою визначається її реологічними властивостями. Бетонні суміші належать до в'язкопластичних матеріалів, для яких характерна наявність граничного напруження зсуву. Теоретичні основи реології таких матеріалів сформульовані у працях Бінгама та подальших дослідженнях у галузі механіки суцільних середовищ [8]. Однак більшість аналітичних рішень отримано для площини поверхонь, тоді як реальні будівельні конструкції можуть мати криволінійну геометрію.

Формулювання цілей статті. Метою дослідження є аналіз умов руху бетонної суміші на похилих і криволінійних поверхнях та визначення

параметрів, що впливають на стабільність шару матеріалу під час формування монолітних оболонкових конструкцій.

Основна частина. Бетонну суміш можна розглядати як в'язкопластичний матеріал типу Бінгама. Зв'язок між дотичним напруженням і швидкістю деформації описується рівнянням

$$\tau = \tau_0 + \mu \frac{dv}{dy}, \quad (1)$$

де τ - дотичне напруження; τ_0 - граничне напруження зсуву; μ - пластична в'язкість; v - швидкість руху матеріалу.

Шар бетонної суміші товщиною h , розташований на поверхні, нахилений під кутом α до горизонталі. Баланс сил у напрямку течії можна записати у вигляді

$$\frac{d\tau}{dy} = \rho g \sin \alpha, \quad (2)$$

де ρ - густина бетонної суміші; g - прискорення вільного падіння.

Після інтегрування отримуємо розподіл дотичного напруження в шарі

$$\tau(y) = \rho g (h - y) \sin \alpha. \quad (3)$$

Течія виникає тоді, коли $\tau(y) > \tau_0$. Рівняння для швидкості руху бетонної суміші має вигляд

$$\mu \frac{dv_x}{dy} = \rho g (h - y) \sin \alpha - \tau_0 \quad (4)$$

Після інтегрування

$$v_x(y) = \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right) - \frac{\tau_0}{\mu} y. \quad (5)$$

Гранична умова стабільності шару матеріалу визначається співвідношенням

$$\rho g h \sin \alpha = \tau_0. \quad (6)$$

Звідси отримуємо оцінку критичного кута

$$\alpha_{cr} = \arcsin \left(\frac{\tau_0}{\rho g h} \right). \quad (7)$$

Для кожної точки поверхні можна ввести локальний кут нахилу $\alpha = \alpha(s)$, де s є координатою вздовж поверхні. Розподіл напружень визначається локальною геометрією оболонки. Локальні системи координат пов'язані з поверхнею оболонки. Рівняння руху має вигляд

$$\mu \frac{dn}{dv} = \rho g \sin \alpha(s) - \tau_0, \quad (8)$$

де n — координата вздовж нормалі до поверхні.

Нехай поверхня оболонки описується радіус-вектором

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (9)$$

де u та v — криволінійні координати на поверхні.

Дотичні вектори

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}. \quad (10)$$

Одиничний нормальний вектор визначається як

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|}. \quad (11)$$

У кожній точці поверхні можна ввести локальну ортонормовану систему координат $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n})$, де \mathbf{t}_1 та \mathbf{t}_2 — дотичні напрямки, \mathbf{n} — нормаль до поверхні. Кут нахилу поверхні визначається співвідношенням

$$\cos \alpha = \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{g}}{g}. \quad (12)$$

Таким чином,

$$\alpha = \alpha(u, v). \quad (13)$$

У цьому випадку рівняння руху набуває вигляду

$$\mu \frac{\partial v}{\partial n} = \rho g \sin \alpha(u, v) - \tau_0. \quad (14)$$

Висновок. Бетонна суміш у процесі укладання може бути описана як в'язкопластичний матеріал типу Бінгама. Отримані рівняння дозволяють оцінювати розподіл напружень і швидкостей у шарі бетонної суміші та визначати умови початку її течії на похилих поверхнях. Запропоновано узагальнення моделі для криволінійних оболонок із використанням апарату диференціальної геометрії поверхонь. Отримані результати можуть бути використані для аналізу процесів бетонування монолітних оболонкових конструкцій та оптимізації технології укладання бетонної суміші.

Література

1. Ярмоленко М. Г. Технологія будівельного виробництва. Київ : Вища школа, 2005. 342 с.
2. Черненко В. К. Технологія будівельного виробництва. Київ : Вища школа, 2002.
3. Якименко О. В. Технологія будівельного виробництва. Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. 411 с.
4. Lienhard J., Schleicher S., Knippers J. Pneumatic Formwork Systems in Structural Engineering. 2016. URL: https://www.researchgate.net/publication/306104378_Pneumatic_Formwork_Systems_in_Structural_Engineering (дата звернення: 22.05.2026).
5. Pronk A. The Calculation and Construction of the Highest Ice Dome – The Sagrada Familia in Ice. Proceedings of the International Society of Flexible Formwork Symposium (ISOFF'15). Amsterdam, Netherlands, August 2015.

6. Doerstelmann M., Knippers J., Koslowski V. et al. ICD/ITKE Research Pavilion 2014–15: Fibre Placement on a Pneumatic Body Based on a Water Spider Web. *Architectural Design*. 2015. Vol. 85, No. 5. P. 60–65. DOI: <https://doi.org/10.1002/ad.1949>.
7. Bini D. *Building with Air*. London : Butler Tanner and Dennis, 2014. 240 p.
8. Pugnale A., Bologna A. Dante Bini's "New Architectural Formulae": Construction, Collapse and Demolition of Binishells in Australia 1974–2015. *Proceedings of the Society of Architectural Historians Australia and New Zealand*. 2015. Vol. 32. P. 488–499.

MODELING OF THE MOTION OF CONCRETE MIXTURE ON THE SURFACES OF MONOLITHIC STRUCTURES

Valery Usenko

This article addresses the problem of uniform distribution of concrete mix during the formation of monolithic structures on inclined and curvilinear surfaces. The relevance of the study is due to the increasing use of shell, dome, and spatial structures in modern construction, where concreting is performed on surfaces with significant inclination and variable curvature. Under such conditions, the behavior of the concrete mix significantly differs from that observed in horizontal structures of monolithic spatial coverings. This leads to potential defects associated with the non-uniform distribution of material over the surface of structures.

At the early stages of hardening, the concrete mix is modeled as a viscoplastic material of the Bingham type, characterized by yield stress and plastic viscosity. Based on the principles of continuum mechanics, the conditions for the onset of flow under the action of gravity on inclined surfaces are analyzed. Analytical expressions are derived that describe the distribution of shear stresses and velocity profiles within the concrete layer, making it possible to determine the critical conditions for the transition from a solid-like to a flowing state.

Special attention is paid to the generalization of the classical flow model for curvilinear shell surfaces. To achieve this, the mathematical apparatus of differential geometry is employed, allowing consideration of local inclination angles, principal curvatures, and variations in the direction of gravity along the surface. It is shown that the stability conditions of the concrete layer are determined by the local geometric characteristics of the shell.

The proposed model provides a theoretical basis for assessing the stability of concrete mixtures on complex surfaces and can be applied to optimize concreting technologies in the construction of monolithic shell structures. The results contribute to improving structural quality and reducing the risk of defects associated with non-uniform material distribution. The

obtained results can be used to develop recommendations for mix design selection, placement regimes, and quality control of concreting under real construction site conditions.

References

1. Yarmolenko, M. H. (2005). Technology of construction production. Kyiv: Vyshcha shkola, 342 p. [In Ukrainian].
2. Chernenko, V. K. (2002). Technology of construction production. Kyiv: Vyshcha shkola. [In Ukrainian].
3. Yakymenko, O. V. (2016). Technology of construction production. Kharkiv: KhNUMH im. O. M. Beketova, 411 p. [In Ukrainian].
4. Lienhard, J., Schleicher, S., & Knippers, J. (2016). Pneumatic formwork systems in structural engineering. URL: https://www.researchgate.net/publication/306104378_Pneumatic_Formwork_Systems_in_Structural_Engineering (accessed: 22.05.2026) [In English].
5. Pronk, A. (2015). The calculation and construction of the highest ice dome – The Sagrada Familia in Ice. In Proceedings of the International Society of Flexible Formwork Symposium (ISOFF'15) (Amsterdam, Netherlands, August 2015). [In English].
6. Doerstelmann, M., Knippers, J., Koslowski, V., et al. (2015). ICD/ITKE Research Pavilion 2014–15: Fibre placement on a pneumatic body based on a water spider web. *Architectural Design*, 85(5), 60–65. DOI: <https://doi.org/10.1002/ad.1949> [In English].
7. Bini, D. (2014). Building with air. London: Butler Tanner and Dennis, 240 p. [In English].
8. Pugnale, A., & Bologna, A. (2015). Dante Bini's "New architectural formulae": Construction, collapse and demolition of binishells in Australia 1974–2015. *Proceedings of the Society of Architectural Historians Australia and New Zealand*, 32, 488–499. [In English].

Матеріал надійшов до редакції 23.04.2026

Прийнято до друку 13.05.2026 р.