

УДК 514.18

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПРУЖНОГО
ЗГИНАННЯ ЛИСТОВОГО МЕТАЛУ ЗА ДОПОМОГОЮ ВАЛКІВ**

DOI: 10.33842/2313-125X-2026-29-300-307

Хропост В.І., доктор філософії,

hropost1505@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9363-3955

Кресан Т.А., канд. техн. наук,

tsm0515tsm@gmail.com, ORCID: 0000-0002-8280-9502

Заболотній О.А., канд. пед. наук,

zaharovich007@gmail.com, ORCID: 0000-0003-4479-6074*ВП НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут» (м. Ніжин, Україна)*

Статтю присвячено розв'язанню актуальної науково-технічної задачі - розробці математичного апарату для точного налаштування вальцювального обладнання при виготовленні конічних деталей із листового металу з урахуванням ефекту пружинення. Процес згинання листового матеріалу є одним із найбільш поширених методів формоутворення в машинобудуванні, проте його точність суттєво обмежена властивостями пружного відновлення форми заготовки після зняття навантаження. У роботі детально проаналізовано відмінності між вальцюванням циліндричних та конічних поверхонь, акцентовано увагу на необхідності узгодження геометричних параметрів формуючих валків та розгортки заготовки.

Наукова новизна дослідження полягає у застосуванні методів диференціальної геометрії та сферичної тригонометрії для опису деформації розгортних поверхонь. Автором обґрунтовано використання концепції «фіктивного конуса», параметри якого (фіктивна нормальна кривина та фіктивний кут при вершині) розраховуються на основі показника пружинення матеріалу. Математично доведено, що при згинанні геодезична кривина лінії на поверхні залишається незмінною, що дозволило вивести систему рівнянь для визначення параметрів налаштування середнього валка.

У статті представлено параметричні рівняння фіктивного конуса та запропоновано методика переходу від лінійних до кутових розмірів за допомогою сфери одиничного радіуса. Це дає змогу визначити точне просторове положення верхнього формуючого валка через кут повороту його осі. Практична значущість роботи підтверджена конкретними прикладами розрахунку для різних конфігурацій валків, що ілюструють можливість отримання ідентичних деталей при різних налаштуваннях обладнання. Запропоновані залежності дозволяють не лише автоматизувати процес проектування заготовок у вигляді плоских кілець,

а й суттєво підвищити якість готових виробів за рахунок упередженого згинання. Результати дослідження можуть бути впроваджені на підприємствах, що використовують листозгинальні машини для виробництва складнопрофільних деталей.

Ключові слова: математичне моделювання, пружне згинання, листовий метал, вальцювання, конічні деталі, ефект пружинення, фіктивний конус.

Постановка проблеми. Ефективність виготовлення конічних деталей із листового металу на вальцювальних машинах безпосередньо залежить від точності врахування пружних властивостей матеріалу. Основна науково-практична проблема полягає у виникненні ефекту пружинення, через який після припинення деформації заготовка частково відновлює свою початкову форму, що призводить до відхилення геометричних параметрів готового виробу від заданих кресленням.

Для циліндричних деталей налаштування валків є відносно сталим, проте для конічних виробів ситуація ускладнюється низкою факторів: геометрична складність заготовки, змінність параметрів, необхідність «упередженого згинання».

Таким чином, існує потреба у створенні математичної моделі, яка б дозволяла розраховувати кутові параметри положення формуючих валків (зокрема кута повороту осі середнього котка ε_r), виходячи з коефіцієнта пружинення та заданої геометрії кінцевого виробу. Відсутність чітких розрахункових залежностей для таких налаштувань призводить до необхідності проведення численних експериментальних спроб, збільшення витрат матеріалу та зниження продуктивності виробництва.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Виготовлення деталей із листового матеріалу відбувається шляхом його деформування. Поширеним способом є його згинання. При згинанні абсолютно пружного листа він повністю відновлює свою початкову форму після припинення деформації. При згинанні пружного листа відновлення форми відбувається частково. Популярним способом виготовлення циліндричних і конічних деталей є вальцювання металу на листозгинальній машині. Потрібної форми лист набуває за допомогою його пропускання через валки вальцювальних машин. При цьому враховується властивість матеріалу і товщина листа: чим щільніший і товщий метал, тим менш він пластичний, тому при вальцюванні товстих листів металу потрібно враховувати часткове розгинання, тобто пружинення. В роботі [1-4] наведено спосіб визначення коефіцієнта пружинення експериментальним шляхом за допомогою виразу (1.1). Подальше налаштування циліндричних валків здійснюється згідно рис. 1.7,б з використанням виразу (1.3).

Формулювання цілей статті. Метою статті є розробка та наукове обґрунтування математичної моделі процесу пружного згинання листового металу при виготовленні конічних деталей на вальцювальних машинах.

Основна частина. Для виготовлення конічної деталі є свої особливості. По-перше, плоска заготовка є не прямолінійною смугою, а частиною плоского кільця. Концентричні кола, що обмежують це кільце, перетворюються на конічній деталі на верхню і нижню основи. Виникає питання, як виготовити конічну деталь, для якої радіуси обох основ задані. Для циліндричної деталі таке питання не виникає, оскільки валки налаштовані на заданий сталій радіус. Для конічної деталі заготовку у вигляді плоского кільця потрібно пропускати між конічними котками, причому вершини всіх трьох валків повинні збігатися. Місце пропускання і розміри кільця мають бути узгоджені між собою. Таке узгодження здійснюється завдяки відстані від спільної вершини конусів. Ця відстань є спільною як для конічних поверхонь формуючих валків, так і для заготовки.

Як було показано в [1-4] при згинанні розгортної поверхні геодезична кривина лінії на ній не змінюється, а змінюється тільки нормальна складова. Геодезична і нормальна кривина визначаються через кут β при вершині конуса: $k_g = k \cdot \sin \beta$; $k_n = k \cdot \cos \beta$.

Для того, щоб отримати конус із дійсними значеннями кривини k основи і кута β , потрібно здійснити упереджене згинання, тобто помножити нормальну кривину на показник p пружинення. Після цього ми отримаємо фіктивну нормальну кривину основи: $k_{nf} = p \cdot k_n = p \cdot k \cdot \cos \beta$. Кут β теж зміниться, тобто набуде фіктивного значення β_f . Нормальну кривину для фіктивного конуса можемо записати, враховуючи нове значення його нормальної кривини k_{nf} : $k_{nf} = k_f \cos \beta_f$. Прирівняємо два вирази нормальної кривини фіктивного конуса:

$$p \cdot k \cdot \cos \beta = k_f \cdot \cos \beta_f. \quad (1)$$

До виразу (1) входять дві невідомі величини: k_f і β_f . Для їх знаходження скористаємося рівністю геодезичної кривини до і після згинання:

$$k \sin \beta = k_f \sin \beta_f. \quad (2)$$

Два рівняння (1) і (2) утворює систему двох рівнянь із двома невідомими k_f і β_f . Розв'язком цієї системи є наступні вирази:

$$k_f = k \sqrt{\sin^2 \beta + p^2 \cos^2 \beta}. \quad (3)$$

$$\beta_f = \text{Arccos} \frac{p \cos \beta}{\sqrt{\sin^2 \beta + p^2 \cos^2 \beta}}. \quad (4)$$

Запишемо рівняння конуса, вершина якого розташована в початку координат і всі твірні якого нахилені під кутом β до його осі:

$$X = u \sin \beta \cos v; \quad Y = u \sin \beta \sin v; \quad Z = u \cos \beta, \quad (5)$$

де u і v – незалежні змінні, причому u – довжина прямолінійної твірної, відлік якої починається від вершини, тобто від початку координат, v – кут повороту твірної конуса навколо його осі.

Із врахуванням (4) параметричні рівняння (5) для фіктивного конуса запишуться:

$$\begin{aligned}
 X_f &= u \frac{\sin \beta}{\sqrt{\sin^2 \beta + p^2 \cos^2 \beta}} \cos v; \\
 Y_f &= u \frac{\sin \beta}{\sqrt{\sin^2 \beta + p^2 \cos^2 \beta}} \sin v; \\
 Z_f &= u \frac{p \cos \beta}{\sqrt{\sin^2 \beta + p^2 \cos^2 \beta}}.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Для $p=1$ рівняння (5) і (6) стають ідентичними, тобто за відсутності пружинення дійсний і фіктивний конуси збігаються.

На відміну від валків для виготовлення циліндричних деталей, при налаштуванні конічних валків зручно оперувати не лінійними, а кутовими розмірами. Поверхні конусів формуючих валків, а також поверхню фіктивного конуса із суміщеними вершинами помістимо в центр сфери (рис.1,а).

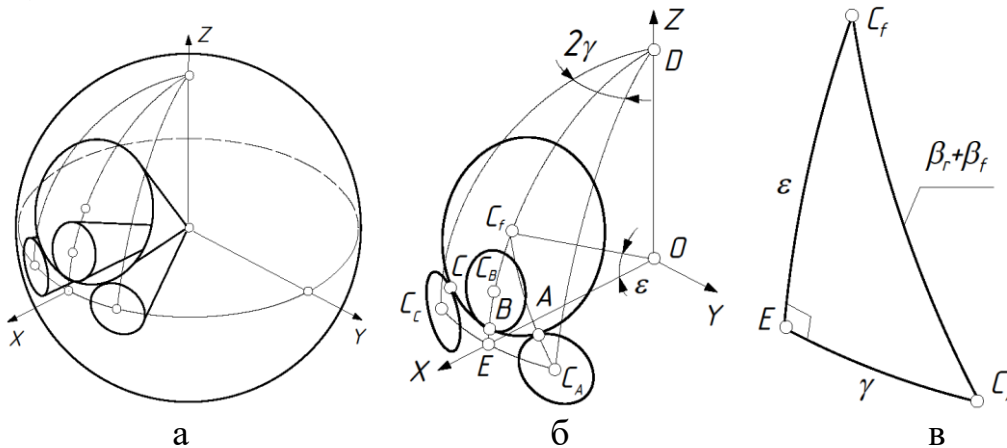


Рис. 1. Застосування сфери одиничного радіуса для розрахунку параметрів налаштування конічних валків: а) схема розташування поверхонь формуючих і фіктивного конусів по відношенню до сфери; б) зв'язок між кутовими розмірами кіл (основ конуса) та їх центрів на поверхні сфери; в) сферичний прямокутний трикутник для визначення кута ε розташування центра C_f фіктивного конуса

Кола – основи всіх конусів – будуть розташовані на поверхні сфери. Радіус основи кожного конуса визначається із добутку довжини його твірної, тобто радіуса сфери, на синус кута β при вершині. Якщо сфера одиничного радіуса, то радіус основи буде рівний синусу кута, тобто відбувається перехід від лінійних до кутових розмірів. Аналогом відстані L для циліндричних котків [1-4] буде кут γ для конічних котків (рис. 1,б). Кутові γ відповідають дуги CAE і SSE. Розмір конічних котків задано кутом β_r при їх вершині, що відповідає дугам CCC, BCB і ACA. Кут при вершині фіктивного конуса β_f , що відповідає дузі BC_f, розраховується за формулою (4). Необхідно знайти положення верхнього формуючого валка, тобто кут, якому відповідає дуга ECB.

Розглянемо прямокутний трикутник $EC_A C_f$, який для нашого випадку є сферичним. Катет $EC_A = \gamma$, гіпотенуза $C_f C_A = \beta_r + \beta_f$, катет EC_f , якому відповідає кут ε , невідомий (рис. 1,в). Використовуючи формули сферичної тригонометрії, знаходимо:

$$\varepsilon = \text{Arccos} \frac{\cos(\beta_r + \beta_f)}{\cos \gamma}. \quad (7)$$

Дуга EC_B є частиною сферичного катета EC_f . Згідно рис. 3.1,б можна записати:

$$EC_B = EC_f - BC_f + BC_B. \quad (8)$$

Позначимо кут, якому відповідає дуга EC_B через ε_r . В рівнянні (8) перейдемо від дуг до позначення відповідних кутів:

$$\varepsilon_r = \varepsilon - \beta_f + \beta_r. \quad (9)$$

Після знаходження кута ε_r стає відоме положення середнього котка: його вісь потрібно повернути на кут ε_r навколо осі OY вгору, починаючи від точки E .

Зігнути плоску заготовку в одну і ту ж конічну деталь можна при різному розташуванні валків, тобто валки можуть мати незмінний кут β_r при вершині, але інший кут γ . Можливий варіант, коли міняються обидва кути: γ і β_r . Для підтвердження сказаного наведемо приклади.

Розглянемо приклад: потрібно налаштувати валки на виготовлення конічної деталі із кутом $\beta = 12^\circ$ при вершині. Коефіцієнт пружинення відомий – $p = 1,2$. Формуючі валки мають кут при вершині $\beta_r = 5^\circ$. Кут $\gamma = \pm 10^\circ$. Знайти кут ε_r .

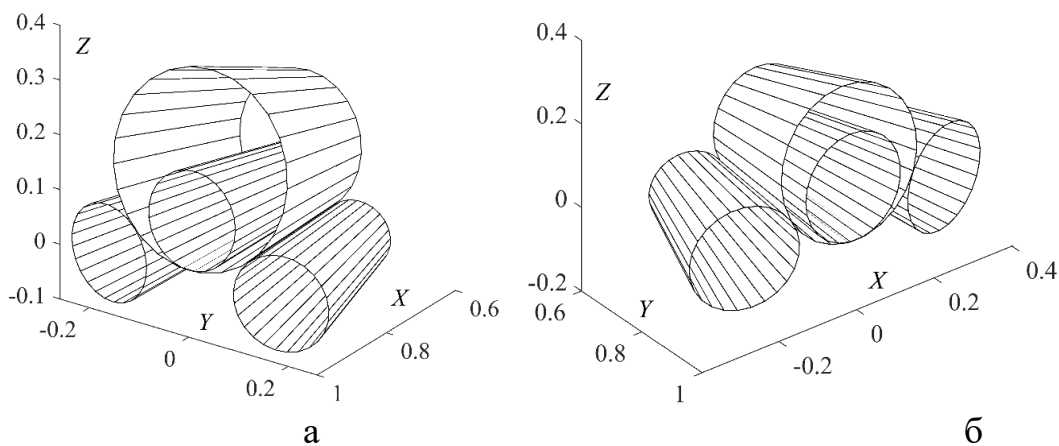


Рис. 2. Поверхні формуючих валків і фіктивного конуса при відомому коефіцієнті пружинення $p = 1,2$ і заданому дійсному куту $\beta = 12^\circ$: а) $\beta_r = 5^\circ$, $\gamma = \pm 10^\circ$, $\beta_f = 10^\circ$, $\varepsilon_r = 6,24^\circ$; б) $\beta_r = 7^\circ$, $\gamma = \pm 15^\circ$, $\beta_f = 10^\circ$, $\varepsilon_r = 5,09^\circ$

За формулою (4) знаходимо кут β_f при вершині фіктивного конуса: $\beta_f = 10^\circ$. За формулою (7) знаходимо кут ε : $\varepsilon = 11,24^\circ$. Кут повороту ε_r осі середнього котка знаходимо за формулою (9): $\varepsilon_r = 6,24^\circ$. Згідно знайдених кутів на рис. 2,а побудовано відсіки формуючих і фіктивного конусів.

Для виготовлення цієї ж деталі можна взяти валки із іншими кутами β_r і γ . На рис. 2,б за рівняннями (5) побудовані поверхні формуючих валків і за рівняннями (6) – фіктивного конуса. Кути налаштування наведені в підписі до рисунка.

Як уже зазначалося, при згинанні поверхні геодезична кривина лінії на ній не змінюється. Вона визначається добутком кривини основи конічної деталі (нижньої або верхньої) на синус кута при вершині. Такою ж буде і кривина дуги кола (зовнішнього або внутрішнього), що обмежує плоске кільце. Радіуси цих кіл є оберненими величинами до геодезичних кривин. Звідси не виникає труднощів для визначення відстані u при заданих радіусах нижньої і верхньої основ конічної деталі. Ще один розмір для плоского кільця – центральний кут, який обмежує його величину. Він визначається із умови того, що довжина дуги кільця і відповідного кола основи конічної деталі мають бути рівними. Таким чином, наведених залежностей достатньо для визначення розмірів плоскої заготовки та місця її пропускання між валками.

Висновки. При пружному згинанні листового матеріалу прокаткою між валками відбувається часткове відновлення його форми. Величина відновлення оцінюється коефіцієнтом пружинення, який встановлюється для окремої партії листового матеріалу експериментальним шляхом. При виготовленні конічних деталей запропоновано кривину кола – основи конуса – розкласти на дві складові: нормальну і геодезичну кривину. Для визначення форми фіктивного конуса, який після прокатки повинен стати реальним, використано положення із диференціальної геометрії поверхонь. Згідно нього при згинанні змінюється тільки нормальна складова кривини лінії, а геодезична залишається незмінною. На основі цього складено параметричні рівняння фіктивного конуса і виконано розрахунки для налаштування конічних валків. Математичне моделювання процесу пружного згинання дозволило встановити, що для компенсації ефекту пружинення при виготовленні конічних деталей необхідно застосовувати концепцію «фіктивного конуса», параметри якого відрізняються від дійсних на показник p .

Література

1. Пилипака С.Ф., Кресан Т.А., Хропост В.І., Бабка В.М. Пружне згинання смуги із значним прогином під дією прикладених сил та моменту. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2021. № 101. С. 137-147. URL: <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2021.101.137-147>
2. Pylypa, S., Hropost, V., Volina, T., Kresan, T., Borodai, S. Analytical description of adjustment of rolls for manufacturing parts from elastic sheet material. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2024. Vol. 1, no. 7 (127), 60–65. URL: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2024.298427>
3. Арендаренко В.М. Ларенко В.В. Особливості розрахунку пружинного елемента регулятора кута атаки культиваторної лапи. *Вісник*

- Полтавської державної аграрної академії*. 2017. № 3. С. 122 - 125. URL: <https://www.pdau.edu.ua/sites/default/files/visnyk/2017/03/30.pdf>
4. Грибков Е.П., Доброносів Ю.К., Коваленко А.К. Експериментальне дослідження процесу правки прокату на багатороликівих правильних машинах. *Обробка матеріалів тиском*. 2023. № 1(52), 138–144. URL: [https://doi.org/10.37142/2076-2151/2023-1\(52\)138](https://doi.org/10.37142/2076-2151/2023-1(52)138)
 5. Liu, H., Liu, Y., Zhang, P., Du, X. Effect Effect of weld zone and corner with cold bending effect on wrinkling of rectangular welded tube in rotary draw bending. *Thin-Walled Structures*. 2020. 157, 107115 URL: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107115>

MATHEMATICAL MODELING OF THE ELASTIC SHEET METAL BENDING PROCESS USING ROLLERS

Vyacheslav Hropost, Tetiana Kresan, Oleksandr Zabolotnii

The article is devoted to solving a relevant scientific and technical problem - the development of a mathematical apparatus for the precise adjustment of rolling equipment in the production of conical parts from sheet metal, taking into account the springback effect. The process of bending sheet material is one of the most common methods of forming in mechanical engineering; however, its accuracy is significantly limited by the properties of the elastic recovery of the workpiece shape after unloading. The paper provides a detailed analysis of the differences between the rolling of cylindrical and conical surfaces, emphasizing the need to coordinate the geometric parameters of the forming rollers and the workpiece blank.

The scientific novelty of the research lies in the application of differential geometry and spherical trigonometry methods to describe the deformation of developable surfaces. The author justifies the use of the "fictitious cone" concept, the parameters of which (fictitious normal curvature and fictitious apex angle) are calculated based on the material's springback index. It is mathematically proven that during bending, the geodesic curvature of a line on the surface remains unchanged, which allowed for the derivation of a system of equations to determine the adjustment parameters of the middle roller.

The article presents the parametric equations of the fictitious cone and proposes a methodology for transitioning from linear to angular dimensions using a unit radius sphere. This enables the determination of the exact spatial position of the upper forming roller through the rotation angle of its axis. The practical significance of the work is confirmed by specific calculation examples for various roller configurations, illustrating the possibility of obtaining identical parts with different equipment settings. The proposed dependencies allow not only for the automation of the design process for blanks in the form of flat rings but also significantly improve the quality of finished products through biased bending. The

research results can be implemented at enterprises using plate-bending machines for the production of complex-profile parts.

Key words: mathematical modeling, elastic bending, sheet metal, rolling (plate rolling), conical parts, springback effect, fictitious cone.

References

1. Pylypaka, S. F., Kresan, T. A., Khropost, V. I., & Babka, V. M. (2021). Elastic bending of a strip with significant deflection under the action of applied forces and moment. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*, 101, 137–147. DOI: <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2021.101.137-147> [In Ukrainian].
2. Pylypaka, S., Hropost, V., Volina, T., Kresan, T., & Borodai, S. (2024). Analytical description of adjustment of rolls for manufacturing parts from elastic sheet material. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 1(7(127)), 60–65. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2024.298427> [In English].
3. Arendarenko, V. M., & Larenko, V. V. (2017). Features of calculation of the spring element of the cultivator sweep attack angle regulator. *Visnyk Poltavskoi derzhavnoi ahrarnoi akademii*, 3, 122–125. URL: <https://www.pdau.edu.ua/sites/default/files/visnyk/2017/03/30.pdf> [In Ukrainian].
4. Hrybkov, E. P., Dobronosov, Yu. K., & Kovalenko, A. K. (2023). Experimental investigation of the straightening process on multi-roll straightening machines. *Obrobka materialiv tyskom*, 1(52), 138–144. DOI: [https://doi.org/10.37142/2076-2151/2023-1\(52\)138](https://doi.org/10.37142/2076-2151/2023-1(52)138) [In Ukrainian].
5. Liu, H., Liu, Y., Zhang, P., & Du, X. (2020). Effect of weld zone and corner with cold bending effect on wrinkling of rectangular welded tube in rotary draw bending. *Thin-Walled Structures*, 157, Article 107115. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107115> [In English].

Матеріал надійшов до редакції 28.04.2026

Прийнято до друку 13.05.2026 р.