УДК 514.18

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИСКРЕТНО ЗАДАНИХ КРИВИХ: СТАН ПРОБЛЕМИ ТА МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ

DOI: 10.33842/2313-125X-2026-29-320-331

Шликов С.Ю., аспірант*
shlukov.servgik@ukr.net, ORCID:0009-0006-5437-6849
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (м. Запоріжжя, Україна)

У статті розглянуто сучасний стан досліджень у галузі геометричного моделювання дискретно заданих кривих та виконано огляд основних підходів до розв'язання задач їх інтерполяції, апроксимації та відновлення. Актуальність дослідження зумовлена широким використанням дискретно представлених даних у сучасних інформаційних технологіях, комп'ютерній графіці, автоматизованому проєктуванні, цифровій обробці зображень, системах підтримки прийняття рішень, логістичних задачах та інших прикладних сферах. У більшості практичних застосувань вихідна інформація подається у вигляді набору дискретних точок, які характеризують форму об'єкта, траєкторію процесу або результати експериментальних спостережень. У зв'язку з цим побудова адекватних математичних моделей, що забезпечують відновлення та аналіз геометричних залежностей, є важливим напрямом сучасних наукових досліджень.

У роботі проаналізовано основні способи математичного представлення кривих, серед яких явне, неявне та параметричне задання. Розглянуто геометричні характеристики кривих, зокрема дотичну, кривину та довжину дуги, які широко використовуються під час дослідження форми геометричних об'єктів і побудови інтерполяційних моделей. Наведено класифікацію кривих за способом представлення та рівнем гладкості, що визначається класами неперервності та є важливою характеристикою під час розроблення алгоритмів геометричного моделювання.

Виконано змістовний огляд сучасних методів моделювання дискретно заданих кривих. Розглянуто інтерполяційні, апроксимаційні та варіаційні підходи, а також особливості їх практичного застосування. Проаналізовано методи глобальної поліноміальної інтерполяції, сплайнові технології, криві Безьє, B-сплайни, NURBS-моделі, методи рухомих найменших квадратів та підроздільні (subdivision) схеми. Для кожного з підходів наведено їх характерні особливості, переваги та обмеження, які

* Науковий керівник – канд. техн. наук, доцент Спірінцев Д.В.

необхідно враховувати залежно від специфіки поставленої задачі та властивостей вихідних даних.

Особливу увагу приділено задачам неперервної та дискретної інтерполяції. Наведено математичні постановки відповідних задач та розглянуто особливості побудови інтерполяційних кривих із використанням поліномів Лагранжа, кубічних сплайнів, сплайнів Ерміта та схем Катмулла–Рома. Проаналізовано підходи до забезпечення гладкості, геометричної узгодженості та локального контролю форми кривих. Окремо розглянуто алгоритм Чайкіна та підроздільні схеми, які застосовуються для згладжування полігональних ліній і побудови гладких граничних кривих шляхом послідовного уточнення початкових даних.

Основним результатом роботи є систематизація сучасних методів геометричного моделювання дискретно заданих кривих, узагальнення їх математичних основ, аналіз особливостей застосування, переваг та обмежень, а також визначення актуальних напрямів подальших досліджень. Проведений аналіз підтверджує доцільність розвитку нових підходів до геометричного моделювання, спрямованих на поєднання високої точності, гладкості, локальної адаптивності та обчислювальної ефективності при розв'язанні задач інтерполяції та відновлення дискретно представлених кривих.

Ключові слова: математичне моделювання, чисельні методи, інтерполяція, апроксимація, екстраполяція, геометричне моделювання.

Постановка проблеми. Широкий перелік прикладних проблем може бути зведено до розв'язання задач математичного моделювання дискретно заданих кривих. До таких проблем, зокрема, належать задачі представлення графічних зображень у цифровому вигляді, побудови оптимальних маршрутів, планування та оптимізація виробничих процесів тощо. У більшості таких задач досліднику надається у використання емпіричні значення параметрів, що представлені у вигляді точок на відповідних системах координат. Відшукання залежності, відновлення значень в неідентифікованих точках, екстраполяція є наукоємними задачами до розв'язання яких можуть бути зведені названі вище проблеми. У наш час існує велика кількість методів та алгоритмів, що ефективно може розв'язувати такі задачі, проте такі методи та алгоритми мають як свої переваги так і недоліки. Зокрема ця наукова стаття присвячена саме огляду існуючих методів. Виокремлення переваг та недоліків та формулюванню конкретних задач для розв'язання в курсі ряду конкретних прикладних задач.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У задачах геометричного моделювання ключовим об'єктом дослідження є крива, яка використовується для опису форми, траєкторій та контурів об'єктів різної природи. У загальному випадку крива розглядається як геометричне місце точок у просторі, що задається певною залежністю між координатами або параметрами [1], [2].

Існує декілька основних способів математичного задання кривих, а саме явне задання коли крива задається функцією $y = f(x)$, або в просторі $z = f(x, y)$. Такий підхід є простим, проте має обмеження, оскільки не дозволяє описувати багатозначні залежності [3], або неявне задання, коли крива визначається рівнянням $F(x, y) = 0$. Цей підхід є більш загальним і дозволяє описувати складні геометричні об'єкти, включаючи замкнені криві [4].

Часом використовується параметричний спосіб задання:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [a;b]. \\ z = z(t) \end{cases}$$

Саме параметричне представлення широко використовується в комп'ютерній графіці та геометричному моделюванні, оскільки дозволяє ефективно керувати формою кривої [1], [5], [6].

Серед основних геометричних характеристик кривих, що використовуються при розвязанні названи вище задач слід виділити:

Дотична. При цьому вектор дотичної визначається як

$$r'(t) = \frac{dr(t)}{dt}.$$

Кривина, що характеризує ступінь викривлення кривої:

$$k(t) = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3}.$$

Ще одним фактором є довжина кривої:

$$L = \int_a^b |r'(t)| dt$$

Такі характеристики є базовими при дослідженні форми кривих та використовуються при побудові інтерполяційних і апроксимаційних моделей [3], [7].

Підкреслимо, що у переважній більшості криві класифікуються за кількома ознаками, а саме За способом задання (аналітичні, параметричні, табличні).

Зокрема, дискретно представлені криві задаються набором точок $\{P_i = (x_i, y_i, z_i)\}, i = 0,1,...,n$. Такі криві є основою для задач інтерполяції та геометричного моделювання [8].

У разі якщо відновлення дискретно заданих кривих здійснюється шляхом згладжування то гладкість кривої визначається класом неперервності (C^0, C^1, C^2). Ці властивості є критично важливими при побудові сплайнів та інтерполяційних кривих [6], [9].

Формулювання цілей статті. Метою статті є узагальнення та систематизація існуючих методів геометричного моделювання дискретно заданих кривих, аналіз їх математичних основ, переваг і недоліків, а також постановка задачі подальших досліджень, спрямованих на підвищення ефективності та обчислювальної швидкодії методів розв'язання задач інтерполяції та відновлення кривих.

Матеріали та методи. Серед основних методів моделювання дискретно заданих кривих слід назвати, зокрема, інтерполяційні криві, апроксимаційні криві, варіаційні криві.

Інтерполяційні криві проходять через задані точки $r(t_i) = P_i$.

Апроксимаційні – лише наближують їх $\sum_{i=0}^{n} \left\| r(t_i) - P_i \right\|^2 \to \min$.

Варіаційні криві визначаються як мінімізатори функціоналів

$$J[r] = \int_a^b F(r, r', r'')dt \to \min$$

Такі підходи широко застосовуються у сучасному геометричному моделюванні [2], але їх можна розділити, зокрема, за типом математичної моделі (поліноміальні криві, раціональні криві, сплайни, підроздільні (subdivision) криві).

Наприклад крива Безьє

$$r(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i$$

де $B_i^n(t)$ – базис Бернштейна [1], або B-сплайни $r(t) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(t) P_i$. Ці моделі є основою сучасних CAD-систем [10], [11].

Основна частина. Основна задача поліноміальної інтерполяції формулюється наступним чином. Нехай задано дискретний набір точок $\{P_i\}_{i=0}^{n}, P_i \in R^m$, який визначає ламану лінію. Основною задачею є побудова неперервної параметричної кривої $C(t):[a;b] \to R^m$, такої, що $C(t_i) = P_i, i = 0,1,...,n$.

У випадку глобальної поліноміальної інтерполяції шукається функція вигляду $C(t) \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, де коефіцієнти a_k визначаються з умов інтерполяції. Альтернативно використовується форма Лагранжа:

$$C(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i \cdot l_i(t),\; l_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}.$$

При застосуванні кусочно-поліноміальних кривих та сплайнових методів, для усунення недоліків глобальної інтерполяції використовуються кусочно-поліноміальні функції, або сплайни. Нехай відрізок $[a;b]$ розбито вузлами $t_0 < t_1 < ... < t_n$. Тоді кубічний сплайн визначається як функція

$S(t) \in C^2[a;b]$, яка на кожному інітервалі $[t_i, t_{i+1}]$ задається поліномом третього степеня:

$$S_i(t) = a_i + b_i(t - t_i) + c_i(t - t_i)^2 + d_i(t - t_i)^3.$$

Умови неперервності задачі мають вигляд:

$$S_i(t_i) = P_i,\ S_i(t_{i+1}) = P_{i+1},\ S_i^{'}(t_{i+1}) = S_{i+1}^{'}(t_{i+1}),\ S_i^{''}(t_{i+1}) = S_{i+1}^{''}(t_{i+1}).$$

При розвязанні задач з використанням інтерполяційних схем та геометричних обмежень важливо враховувати не лише положення точок, але й геометричні характеристики кривої. Наприклад, у сплайнах Ерміта крива, як правило може бути записана у такому загальному, аналітичному вигляді:

$$C(t) = h_1(t)P_i + h_2(t)P_{i+1} + h_3(t)T_i + h_4(t)T_{i+1},$$

де T_i позначають дотичні та представлені у вигляді векторів, а $h_k(t)$ – є функціями Ерміта, що представлені у векторному вигляді.

Однією з необхідних умов є умова неперервності для G^1, для цього має виконуватись умова:

$$C_i'(t_{i+1}) = \lambda C_{i+1}'(t_{i+1}), \lambda > 0.$$

Ще одним варіантом сплайна, запровонований Катмуллом–Ромом дотичні можуть бути визначені у такому вигляді:

$$T_i = \frac{1}{2}(P_{i+1} - P_{i-1}),$$

виконання цієї умови забезпечує, зокрема, не тільки результат, що представлений у вигляді отриманих вузлів, але й є зручним для обчислювального експерименту.

Окремим класом методів є так названі “підроздільні” або “subdivision” методи, в їх основу покладено методи ітераційного уточнення полігональної лінії, що в аналітичному вигляді представлена так:

$$P_i^{(k+1)} = \sum_j a_j P_{i+j}^{(k)},$$

де a_j – вагові коефіцієнти.

Для підроздільної схеми можуть застосовуватись різні варіації, нижче наведений приклад 4-х точкової схеми, що в аналітичному вигляді представлена таким чином:

$$P_{2i+1}^{(k+1)} = -\frac{1}{16}P_{i-1}^{(k)} + \frac{9}{16}P_i^{(k)} + \frac{9}{16}P_{i+1}^{(k)} - \frac{1}{16}P_{i+2}^{(k)}.$$

Такий та аналогічні методи забезпечують побудову кривих (гладких) при кількості ітерацій, що прямує до нескінченності

$$\lim_{k \to \infty} P^{(k)} = C(t),$$

де $C(t)$ – а в результаті застосування методу можна отримати граничну криву.

Серед розповсюджених класів методів також слід назвати клас методів, що заснований на методі рухомих найменших квадратів (MLS), який в аналітичному вигляді має таку форму:

$$C(t) = \arg\min_{f} \sum_{i=0}^{n} \omega_i(t) \left\| f(t_i) - P_i \right\|^2 ,$$

де $\omega_i(t)$ – це вагові функції.

Використання таких методів обумовлено використанням у якості вихідних даних нерегулярних та зашумлених даних.

В результаті аналізу існуючих методів, очевидним постає висновок про те, що жоден із існуючих підходів та методів не є універсальним та, зокрема, не позбавлений недоліків. Методи пов’язані з використанням глобальних поліномів забезпечують отриманого рішення точність, але мають проблеми зі стійкістю віднайдених рішень. Методи, що базуються на використанні сплайнів, у більшості поєднують гармонійний баланс між гладкістю та локальністю розв’язки, проте не показують визначних результатів в обидвох напрямах. Підроздільні методи, здебільшого розраховані на обробку великих наборів даних, а для малих вибірок мають проблеми з точністю. Варіаційні та MLS-підходи ефективні при обробці нерегулярних даних великих розмірів, а для малих вибірок, що характерні повнотою та регулярністю даних показують, як правило, незадовільні результати. Порівняльний аналіз доводить до висновку про необхідність створення та обґрунтування нових компартментальних методів геометричного моделювання дискретно представлених кривих довільної форми.

Для формалізації проблеми, одним з визначальних етапів є постановка задачі. Загальна постановка задачі дискретної інтерполяції дискретно представлених кривих має вигляд: задано дискретну множину точок $\{P_i\}_{i=0}^{n}, P_i \in R^m$, необхідно знайти аналітичне представлення ламаної яка в заданих у вихідних даних точках приймає задані значення.

На відміну від методу “неперервної інтерполяції” під час використання якого метою є отримання саме гладкої функції $C(t)$, у дискретній інтерполяції, тобто при відшуканні не гладкої, а ламаної кривої, результатом є послідовність точок $\{Q_j\}_{j=0}^{N}, N > n$, яка або співпадає із заданими точками у заданих вихідними даними вузлах, або уточнює їх мінімізуючи відхилення (похибку).

У загальному вигляді дискретна інтерполяція представлена оператором $Q_j = \sum_{i=0}^{n} a_{ji} P_i$,де a_{ji} – це вагові коефіцієнти, що визначають вагу внеску кожної початкової (вихідної) точки у формування поточної точки ламаної, що підлягає відшуканню. Наведена вище постановка це дискретний аналог інтегральних або варіаційних моделей неперервної інтерполяції [4], [8], [12]. Основним критерієм для таких методів є збереження геометричних властивостей кривої, що підлягає відшуканню, зокрема таких її властивостей, як монотонність, опуклість, локальність та стабільність до зовнішніх збурень (шумів).

До найпростіших модифікацій наведених методів слід віднести ті, що використовують обмежену кількість точок. Так для прикладу, лінійна інтерполяція визначається

$$Q_{2i} = P_i,\ Q_{2i+1} = \frac{1}{2}(P_i + P_{i+1}),$$

що може призвести у тому числі до подвоєння кількості точок та, як наслідок суттєвого згладжування ламаної, що підлягає відшуканню.

До більш складених модифікацій слід віднести методи, що використовують більш ширший перелік точок. Так згладжувальний оператор може бути заданий, зокрема, і наступним чином

$$Q_i = \sum_{k=-r}^{r} \omega_k P_{i+k},\ \sum_{k=-r}^{r} \omega_k = 1,$$

де ω_k – вагові коефіцієнти, що, зокрема, можуть визначати ступінь згладжування.

Ще одним дієвим алгоритмом для розв’язання задач у наведених постановках є алгоритм Чайкіна, який, зокрема, дискретну інтерполяцію, визначає з використанням наступних формул:

$$Q_{2i} = \frac{3}{4}P_i + \frac{1}{4}P_{i+1},\ Q_{2i+1} = \frac{1}{4}P_i + \frac{3}{4}P_{i+1}.$$

Такий метод дозволяє розрахувати згладжену криву з використанням ітеративних підходів та її ітеративному застосуванню. Слід зазначити, що такі методи характеризуються, зокрема, простотою реалізації та високою швидкодією, однак за ряду умов призводять до низької точності.

Згадані вище підроздільні (subdivision) методи, реалізовані з використанням ітераційних схем, зокрема, що можуть бути представлені у вигляді

$$P_i^{(k+1)} = \sum_j a_j P_{i+j}^{(k)}.$$

Такі схеми зберігають вихідні данні $P_{2i}^{(k+1)} = P_i^{(k)}$. Вдалим прикладом може слугувати 4-х точкова схема, що у загальному вигляді набуває такого представлення:

$$P_{2i+1}^{(k+1)} = -\frac{1}{16}P_{i-1}^{(k)} + \frac{9}{16}P_i^{(k)} + \frac{9}{16}P_{i+1}^{(k)} - \frac{1}{16}P_{i+2}^{(k)},$$

та забезпечує отримання розв’язку у вигляді гладкої граничної кривої.

Слід відмітити, що у сучасних задачах, у тому числі, широко застосовуються методи дискретної диференціальної геометрії. У такій постановці оцінка дискретної кривизни, зокрема, може бути оцінена таким чином:

$$k_i = \frac{\left\| P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1} \right\|}{\left\| P_{i+1} - P_i \right\|^2},$$

це дозволяє регулювати, зокрема, і густину точок кривої (ламаної). Слід зазначити, що серед інструментів обробки, згаданих вище, полігональних ліній широко використовуються, зокрема, лапласіани у вигляді:

$$\Delta P_i = \sum_{j \in N(i)} (P_j - P_i).$$

Їх використання, зумовлено, зокрема, необхідністю згладжування та реконструкції геометрії [13]. Це дозволяє врахувати геометрію кривої (в локальному сенсі) та забезпечити більш високу точність отриманого розв’язку. Таким чином слід зазначити, що дискретні методи, здебільшого, характеризуються високою обчислювальною ефективністю та високою точністю, проте локальні схеми можуть забезпечити більшу швидкість, а підроздільні методи – ієрархічність та гладкість. При цьому для розв’язанні задач для яких характерне зашумлення більш адекватними є варіаційні методи.

Аналіз недоліків існуючих методів досліджень. Порівняльний аналіз існуючих класів методів та підходів до розвязання задачі дискретної та варіаційної інтерполяції кривих показав можливість їх широкого застосування, проте висвітлив суттєві обмеження, що храктерні для окремих класів методі і, зокрема, підкреслив відсутність універсальних методів розв’язання такої задачі, а більш необхідність створення та обґрунтування нових комплексних та компартментальних методів.

В порівнянні з методами глобальної поліноміальної інтерполяції, що більш розповсюджені у наш час та мають широке застосування, які забезпечують більш точне співпадінні інтерполюючої функції із вихідними значеннями, однак характеризуються низькою стійкістю та схильністю до осциляцій, особливо при збільшенні кількості вузлів [9]. Такі ефекти можуть призвести до викривлення форми кривої та, зокрема, зниження точності отриманого розвязку.

Широкий перелік сплайнових методів, зокрема B-сплайни та NURBS [5], [10], [11], спроможні забезпечити достатньо високий рівень гладкості інтерполюючої функції та можливість другорядними засобами впливати на її форму. Водночас такі підходи є, фактично, апроксимаційними, а не інтерполяційними, що ускладнює відтворення вихідних дискретних даних, що і є основною задачею. Слід також зазначити, що значною мірою, розв’язок задачі суттєвим чином залежить від значень параметрів та вагових коефіцієнтів.

І як було зазначено вище, отриманий розв’язок із використанням дискретних підроздільних методів характерний гладкістю кривих, що досягається, зокрема, ітераційним уточненням полігональних ліній. Проте, такі методи можуть, зокрема, призвести до небажаного результату, що може виявитись у надмірному згладжуванні розв’язку задачі, що в свою чергу може зумовити часткову втрату геометричних особливостей розв’язку задачі.

Зважаючи на вищевикладене, основними недоліками існуючих методів є:

- несуміжність для існуючих методів одночасного забезпечення характеристик точності та гладкості для отриманих розв’язків;
- низький рівень адаптивності розв’язків отриманих з використанням сучасних методів до локальних геометричних особливостей;
- нестійкість методів до варіації параметрів моделі;
- висока обчислювальна складність задач високої розмірності;
- складність розв’язання задач для вихідних параметрів яких характерна зашумленість.

Висновки. В роботі досліджене питання сучасного стану досліджень з проблеми відтворення кривих заданих у дискретній формі. Досліджено ряд методів та підходів та їх переваги та недоліки порівняні, зокрема, з результатами класичного підходу, (інтерполяції) для яких висвітлено їх переваги та недоліки. Широкий перелік існуючих методів та алгоритмів мають своє прикладне застосування для задач, що мають характерні особливості, наприклад зашумленість вихідних даних, невизначеність, висока ступінь похибки, стохастичність тощо. Зроблено обгрунтовані висновки про застосування таких методів та підходів в задачах із певними початковими обмеженнями та надана кількісна оцінка названих в роботі переваг та недоліків. Серед досліджених в роботі методів слід назвати, зокрема, сплайнові методи, B-сплайни та NURBS .Зроблено обгрунтований висновок про зведення названих підходів більше до апроксимаційних ніж до інтерполяційних. Які в задачах, де не вимагається висока точність є застосовними, а в інших задачах можуть призвести не тільки до втрати точності, але й до втрати стійкості отриманого розв’язку.

Література

1. Farin G. Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design: A Practical Guide. 5th ed. San Diego : Academic Press, 2002. 512 p.
2. Mortenson M. E. Geometric Modeling. 3rd ed. New York : Industrial Press, 2006. 512 p.
3. do Carmo M. P. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Englewood Cliffs : Prentice-Hall, 1976. 503 p.
4. Preparata F. P., Shamos M. I. Computational Geometry: An Introduction. New York : Springer, 1985. 398 p.
5. Rogers D. F. An Introduction to NURBS: With Historical Perspective. San Francisco : Morgan Kaufmann, 2001. 336 p.
6. Bartels R. H., Beatty J. C., Barsky B. A. An Introduction to Splines for Use

in Computer Graphics and Geometric Modeling. San Francisco : Morgan Kaufmann, 1987. 476 p.
7. Gray A. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica. 3rd ed. Boca Raton : CRC Press, 2006. 1136 p.
8. O'Rourke J. Computational Geometry in C. 2nd ed. Cambridge : Cambridge University Press, 1998. 376 p.
9. de Boor C. A Practical Guide to Splines. Rev. ed. New York : Springer, 2001. 346 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6333-3.
10. Piegl L., Tiller W. The NURBS Book. 2nd ed. Berlin : Springer, 1997. 646 p.
11. Hoschek J., Lasser D. Fundamentals of Computer Aided Geometric Design. Wellesley : A K Peters, 1993. 426 p.
12. Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C. Introduction to Algorithms. 3rd ed. Cambridge, MA : MIT Press, 2009. 1312 p.
13. Botsch M., Kobbelt L., Pauly M., Alliez P., Lévy B. Polygon Mesh Processing. Natick : AK Peters, 2010. 330 p. DOI: https://doi.org/10.1201/b10688.
14. Foley J. D., van Dam A., Feiner S. K., Hughes J. F. Computer Graphics: Principles and Practice. 3rd ed. Boston : Addison-Wesley, 2013. 1328 p.
15. Salomon D. Curves and Surfaces for Computer Graphics. New York : Springer, 2006. 443 p.

GEOMETRIC MODELING OF DISCRETELY DEFINED CURVES: STATE OF THE ART AND SOLUTION METHODS

Serhiy Shlykov

The article examines the current state of research in the field of geometric modeling of discretely defined curves and provides a review of the main approaches to solving the problems of their interpolation, approximation, and reconstruction. The relevance of the study is determined by the widespread use of discretely represented data in modern information technologies, computer graphics, computer-aided design, digital image processing, decision support systems, logistics problems, and other applied fields. In most practical applications, the initial information is presented as a set of discrete points that characterize the shape of an object, the trajectory of a process, or the results of experimental observations. In this regard, the construction of adequate mathematical models that ensure the reconstruction and analysis of geometric relationships is an important direction of modern scientific research.

The paper analyzes the main methods of mathematical representation of curves, including explicit, implicit, and parametric definitions. The geometric characteristics of curves, in particular the tangent, curvature, and arc length, which are widely used in the study of the shape of geometric objects and in the *construction of interpolation models, are considered. A classification of curves according to the method of representation and the level of smoothness determined by continuity classes is presented, which is an important characteristic in the development of geometric modeling algorithms.*

A comprehensive review of modern methods for modeling discretely defined curves is carried out. Interpolation, approximation, and variational approaches, as well as the features of their practical application, are considered. Methods of global polynomial interpolation, spline technologies, Bézier curves, B-splines, NURBS models, moving least squares methods, and subdivision schemes are analyzed. For each approach, its characteristic features, advantages, and limitations that should be taken into account depending on the specifics of the problem and the properties of the input data are presented.

Particular attention is paid to the problems of continuous and discrete interpolation. Mathematical formulations of the corresponding problems are presented, and the features of constructing interpolation curves using Lagrange polynomials, cubic splines, Hermite splines, and Catmull–Rom schemes are considered. Approaches to ensuring smoothness, geometric consistency, and local shape control of curves are analyzed. Special consideration is given to Chaikin's algorithm and subdivision schemes, which are used for smoothing polygonal lines and constructing smooth limit curves through successive refinement of the initial data.

Based on the conducted review, it has been established that different classes of methods possess their own advantages and application features. Global polynomial interpolation methods provide high accuracy in passing through prescribed points, spline approaches make it possible to obtain smooth curves and perform local shape control, subdivision schemes are effectively used for constructing smooth geometric models, while variational methods and moving least squares methods demonstrate good performance when dealing with irregular and noisy data. At the same time, the choice of a particular approach largely depends on the nature of the input data, as well as on the requirements for accuracy, smoothness, and computational efficiency of the obtained solution.

The main result of the work is the systematization of modern methods of geometric modeling of discretely defined curves, the generalization of their mathematical foundations, the analysis of application features, advantages, and limitations, as well as the identification of relevant directions for further research. The conducted analysis confirms the expediency of developing new approaches to geometric modeling aimed at combining high accuracy, smoothness, local adaptability, and computational efficiency in solving problems of interpolation and reconstruction of discretely represented curves.

Keywords: Mathematical modeling, numerical methods, interpolation, approximation, extrapolation, geometric modeling.

References

1. Farin, G. (2002). Curves and surfaces for computer-aided geometric design: A practical guide (5th ed.). San Diego: Academic Press, 512 p. [In English].
2. Mortenson, M. E. (2006). Geometric modeling (3rd ed.). New York: Industrial Press, 512 p. [In English].
3. do Carmo, M. P. (1976). Differential geometry of curves and surfaces. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 503 p. [In English].
4. Preparata, F. P., & Shamos, M. I. (1985). Computational geometry: An introduction. New York: Springer, 398 p. [In English].
5. Rogers, D. F. (2001). An introduction to NURBS: With historical perspective. San Francisco: Morgan Kaufmann, 336 p. [In English].
6. Bartels, R. H., Beatty, J. C., & Barsky, B. A. (1987). An introduction to splines for use in computer graphics and geometric modeling. San Francisco: Morgan Kaufmann, 476 p. [In English].
7. Gray, A. (2006). Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica (3rd ed.). Boca Raton: CRC Press, 1136 p. [In English].
8. O'Rourke, J. (1998). Computational geometry in C (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press, 376 p. [In English].
9. de Boor, C. (2001). A practical guide to splines (Rev. ed.). New York: Springer, 346 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6333-3 [In English].
10. Piegl, L., & Tiller, W. (1997). The NURBS book (2nd ed.). Berlin: Springer, 646 p. [In English].
11. Hoschek, J., & Lasser, D. (1993). Fundamentals of computer aided geometric design. Wellesley: A K Peters, 426 p. [In English].
12. Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., & Stein, C. (2009). Introduction to algorithms (3rd ed.). Cambridge, MA: MIT Press, 1312 p. [In English].
13. Botsch, M., Kobbelt, L., Pauly, M., Alliez, P., & Lévy, B. (2010). Polygon mesh processing. Natick: AK Peters, 330 p. DOI: https://doi.org/10.1201/b10688 [In English].
14. Foley, J. D., van Dam, A., Feiner, S. K., & Hughes, J. F. (2013). Computer graphics: Principles and practice (3rd ed.). Boston: Addison-Wesley, 1328 p. [In English].
15. Salomon, D. (2006). Curves and surfaces for computer graphics. New York: Springer, 443 p. [In English].

Матеріал надійшов до редакції 29.04.2026

Прийнято до друку 13.05.2026 р.